สมบัติบางประการของเมทริกซ์ที่มีสมาชิกเป็นลำดับเลขคณิต

Some Properties of the Matrices whose members are Arithmetic Sequence

นิรุต มีเกิด

โรงเรียนบ้านไร่พิทยาคม ศรีสำโรง สุโขทัย 64120

บทคัดย่อ

บทความนี้ได้ศึกษาตัวกำหนดและเมทริกซ์ผูกพันของเมทริกซ์ซึ่งมีบางแถว(หลัก) ที่มีสมาชิกเป็นลำดับเลขคณิต

คำสำคัญ: ดีเทอร์มิแนนต์ เมทริกซ์ผูกพัน ลำดับเลขคณิต

Abstract

In this paper, we study the determinant and adjoint matrix of matrices whose have some rows (columns) entries are arithmetic sequence.

Keywords: Determinant , Adjoint matrix , Arithmetic sequence

บทนำ

จากการศึกษาเมทริกซ์ขนาด 3×3 ที่มีสมาชิกในแต่ละแถวเป็นลำดับเลขคณิต พบว่าตัวกำหนดมีค่าเท่ากับ 0 เสมอ นอกจากนี้ยังพบว่าผลรวมของสมาชิกในแต่ละหลักของเมทริกซ์ผูกพันก็มีค่าเท่ากับ 0

ในบทความนี้จะกล่าวถึงสมบัติของตัวกำหนดและเมทริกซ์ผูกพันของเมทริกซ์ขนาด $n\times n$ ที่มีสมาชิกบางแถว(หลัก) เป็นลำดับเลขคณิต

สมบัติบางประการของเมทริกซ์ที่มีสมาชิกเป็นลำดับเลขคณิต

บทตั้ง 1 ให้ $A=\left[a_{ij}\right]_n$ ถ้า $\sum_{i=1}^{n} a_{ij}=0$ สำหรับทุก ๆ $j\in\{1,2,\ldots,n\}$ แล้ว $\left|A\right|=0$ (Meekoed, 2003)

บทตั้ง 2 ให้ $A=\left[a_{ij}\right]_n$ และ $\operatorname{adj} A=\left[c_{ij}\right]_n$

ถ้า
$$A=\begin{bmatrix} \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{r1} & a_{r1}+x_1 & a_{r1}+2x_1 & \cdots & a_{r1}+(n-1)x_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{s1} & a_{s1}+x_2 & a_{s1}+2x_2 & \cdots & a_{s1}+(n-1)x_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix}$$
แล้ว $\sum_{i=1}^{n} c_{ij}=0$ สำหรับทุก ๆ $j\notin\{r,s\}$

พิสูจน์ ให้
$$A=\begin{bmatrix} \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{r1} & a_{r1}+x_1 & a_{r1}+2x_1 & & a_{r1}+(n-1)x_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{s1} & a_{s1}+x_2 & a_{s1}+2x_2 & & a_{s1}+(n-1)x_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix}$$

จาก $A\cdot\operatorname{adj} A=\left|A\right|I_n$

จะได้ว่า $a_{r1}c_{1j}+(a_{r1}+x_1)c_{2j}+(a_{r1}+2x_1)c_{3j}+\ldots+(a_{r1}+(n-1)x_1)c_{nj}=0$ ....(1)

$a_{s1}c_{1j}+(a_{s1}+x_2)c_{2j}+(a_{s1}+2x_2)c_{3j}+\ldots+(a_{s1}+(n-1)x_2)c_{nj}=0$ ....(2)

สำหรับทุก ๆ $j\notin\{r,s\}$

นำ $x_2\cdot(1)-x_1\cdot(2)$

จะได้ $(x_2a_{r1}-x_1a_{s1})c_{1j}+(x_2a_{r1}-x_1a_{s1})c_{2j}+\ldots+(x_2a_{r1}-x_1a_{s1})c_{nj}=0$

นั่นคือ $\sum_{i=1}^{n} c_{ij}=0$ สำหรับทุก ๆ $j\notin\{r,s\}$ #

ทฤษฎีบท 3 ให้ $A = \left[a_{ij}\right]_n$ และ $\operatorname{adj} A = \left[c_{ij}\right]_n$

ถ้า $A = \begin{bmatrix} \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{r1} & a_{r1}+x_1 & a_{r1}+2x_1 & \cdots & a_{r1}+(n-1)x_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{s1} & a_{s1}+x_2 & a_{s1}+2x_2 & \cdots & a_{s1}+(n-1)x_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{t1} & a_{t1}+x_3 & a_{t1}+2x_3 & \cdots & a_{t1}+(n-1)x_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix}$ แล้ว $\sum_{i=1}^{n} c_{ij} = 0$ สำหรับทุก ๆ $j \in \{1,2,\ldots,n\}$

พิสูจน์ โดยบทตั้ง 2 #

ทฤษฎีบท 4 ให้ $A = \left[a_{ij}\right]_n$ และ $\operatorname{adj} A = \left[c_{ij}\right]_n$

ถ้า $A = \begin{bmatrix} \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{r1} & a_{r1}+x_1 & a_{r1}+2x_1 & & a_{r1}+(n-1)x_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{s1} & a_{s1}+x_2 & a_{s1}+2x_2 & & a_{s1}+(n-1)x_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{t1} & a_{t1}+x_3 & a_{t1}+2x_3 & & a_{t1}+(n-1)x_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix}$ แล้ว $|A| = 0$

พิสูจน์ โดยบทตั้ง 2 จะได้ว่า $\sum_{i=1}^{n} c_{ij} = 0$ สำหรับทุก ๆ $j \in \{1,2,\ldots,n\}$

โดยบทตั้ง 1 จะได้ว่า $|\operatorname{adj} A| = 0$

จาก $|\operatorname{adj} A| = |A|^{n-1}$ จะได้ว่า $|A| = 0$ #

นอกจากนี้เรายังได้รูปแบบทั่วไปของบทตั้ง 2 และทฤษฎีบท 3-4 ดังบทแทรกต่อไปนี้

บทแทรก 5 ให้ $A = \left[a_{ij}\right]_n$ และ $\operatorname{adj} A = \left[c_{ij}\right]_n$

ถ้า $A = \begin{bmatrix} \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{r1} & a_{r1}+d_1x_1 & a_{r1}+d_2x_1 & \cdots & a_{r1}+d_{n-1}x_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{s1} & a_{s1}+d_1x_2 & a_{s1}+d_2x_2 & \cdots & a_{s1}+d_{n-1}x_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix}$ แล้ว $\sum_{i=1}^{n} c_{ij} = 0$ สำหรับทุก ๆ $j \notin \{r, s\}$

พิสูจน์ ทำนองเดียวกับบทตั้ง 2 #

บทแทรก 6 ให้ $A = \left[a_{ij}\right]_n$ และ $\operatorname{adj} A = \left[c_{ij}\right]_n$

ถ้า $A = \begin{bmatrix} \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{r1} & a_{r1}+d_1x_1 & a_{r1}+d_2x_1 & \cdots & a_{r1}+d_{n-1}x_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{s1} & a_{s1}+d_1x_2 & a_{s1}+d_2x_2 & \cdots & a_{s1}+d_{n-1}x_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{t1} & a_{t1}+d_1x_3 & a_{t1}+d_2x_3 & \cdots & a_{t1}+d_{n-1}x_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix}$ แล้ว $\sum_{i=1}^{n} c_{ij} = 0$ สำหรับทุก ๆ $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$

พิสูจน์ ทำนองเดียวกับทฤษฎีบท 3 #

บทแทรก 7 ให้ $A = \left[a_{ij}\right]_n$ และ $\operatorname{adj} A = \left[c_{ij}\right]_n$

ถ้า
$$A = \begin{bmatrix} \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{r1} & a_{r1}+d_1x_1 & a_{r1}+d_2x_1 & \cdots & a_{r1}+d_{n-1}x_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{s1} & a_{s1}+d_1x_2 & a_{s1}+d_2x_2 & \cdots & a_{s1}+d_{n-1}x_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{t1} & a_{t1}+d_1x_3 & a_{t1}+d_2x_3 & \cdots & a_{t1}+d_{n-1}x_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix}$$
แล้ว $\det A = 0$

พิสูจน์ ทำนองเดียวกับทฤษฎีบท 4 #

ทฤษฎีบทและบทแทรกข้างต้นยังคงเป็นจริงสำหรับเมทริกซ์ที่มีสมาชิกในแต่ละหลักเป็นลำดับเลขคณิต ซึ่งวิธีการพิสูจน์นั้นสามารถทำได้ในทำนองเดียวกัน

ตัวอย่างที่ 1
$$A = \begin{bmatrix} 6 & 1 & 4 \\ 5 & 6 & 7 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

จะเห็นว่าสมาชิกในแถวที่ 2 และ 3 เป็นลำดับเลขคณิต

ซึ่งจะได้ว่า
$$\operatorname{adj} A = \begin{bmatrix} -8 & 7 & -17 \\ 16 & -6 & -22 \\ -8 & -9 & 31 \end{bmatrix}$$

จะเห็นว่าผลรวมของสมาชิกในหลักที่ 1 เท่ากับ 0

ตัวอย่างที่ 2 $A = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 1 & 5 & 9 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$

จะเห็นว่าสมาชิกในแต่ละแถวเป็นลำดับเลขคณิต

ซึ่งจะได้ว่า det A = 0 และ $\operatorname{adj} A = \begin{bmatrix} -7 & 1 & 10 \\ 14 & -2 & -20 \\ -7 & 1 & 10 \end{bmatrix}$

จะเห็นว่าผลรวมของสมาชิกในแต่ละหลักเท่ากับ 0

ตัวอย่างที่ 3 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 7 \\ 3 & 5 & 7 & 6 \\ 5 & 11 & 9 & 5 \\ 7 & -3 & 6 & 4 \end{bmatrix}$

จะเห็นว่าสมาชิกในหลักที่ 1 และ 4 เป็นลำดับเลขคณิต

ซึ่งจะได้ว่า $\operatorname{adj} A = \begin{bmatrix} 175 & -427 & 189 & 98 \\ 75 & -165 & 105 & -15 \\ -300 & 555 & -210 & -45 \\ 200 & -209 & 63 & 16 \end{bmatrix}$

จะเห็นว่าผลรวมของสมาชิกในแถวที่ 2 และ 3 เท่ากับ 0

ตัวอย่างที่ 4 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 6 \\ 4 & 5 & 7 & 9 \\ 3 & 5 & 9 & 13 \\ 3 & 7 & 1 & 9 \end{bmatrix}$

จะเห็นว่าสมาชิกในแถวที่ 1 , 2 และ 3 อยู่ในรูป

$$a_{11}, a_{11}+d_1x_1, a_{11}+d_2x_1, a_{11}+d_3x_1$$
$$a_{21}, a_{21}+d_1x_2, a_{21}+d_2x_2, a_{21}+d_3x_2$$
$$a_{31}, a_{31}+d_1x_3, a_{31}+d_2x_3, a_{31}+d_3x_3$$

เมื่อ $a_{11}=1, a_{21}=4, a_{31}=3, d_1=1, d_2=3, d_3=5, x_1=1, x_2=1, x_3=2$

ซึ่งจะได้ว่า det A = 0 และ $\operatorname{adj} A = \begin{bmatrix} 140 & 28 & -84 & 0 \\ -140 & -28 & 84 & 0 \\ -70 & -14 & 42 & 0 \\ 70 & 14 & -42 & 0 \end{bmatrix}$

เอกสารอ้างอิง

1. Anton, H. (2005). *Elementary Linear Algebra*, New York: John Wiley & Sons.
2. Friedberg, S.H., Insel, A.J., and Spence, L.E., (2003). *Linear algebra*. New Jersey : Prentice-Hall.
3. Leon, S.J. (2006). *Linear Algebra with Applications*. New Jersey: Pearson Prentice-Hall.
4. Meekoed, N. (2003). Some Special Properties of Determinants. *KKU. Science Journal*. 31: 214-217.