สมบัติบางประการของรากเฉพาะแบบอ่อนของมอดูล

Some Properties of Weakly Prime Radical of Modules

ไพโรจน์ เยียระยง

สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยราชภัฏพิบูลสงคราม เมือง พิษณุโลก 65000
Corresponding author; E-mail: pairote0027@hotmail.com

บทคัดย่อ

ในงานวิจัยฉบับนี้ ศึกษา ราก รากเฉพาะแบบอ่อน มอดูลย่อยเฉพาะและมอดูลย่อยเฉพาะแบบอ่อนของมอดูลบนริงสลับที่ แนวคิดเหล่านี้ถูกขยายมาจากมอดูลย่อยเฉพาะมอดูลย่อยเฉพาะอย่างอ่อนตามลำดับงานวิจัยนี้ให้การจำแนกลักษณะเฉพาะบางประการของสิ่งที่ได้กล่าวไปข้างต้น นอกจากนี้ ศึกษาความสัมพันธ์ระหว่างรากและรากเฉพาะแบบอ่อนของมอดูลบนริงสลับที่

คำสำคัญ: ราก รากเฉพาะแบบอ่อน มอดูลย่อยเฉพาะ มอดูลย่อยเฉพาะแบบอ่อน ริงสลับที่

Abstract

In this thesis paper, we study radical, weakly prime radical, prime and weakly prime subsemimodules of modules over commutative rings. Those are extended from prime, weakly prime, submodules, respectively. Some characterizations of radical, weakly prime radical, prime and weakly prime subsemimodules are obtained. Moreover, we investigate relationships between radical and weakly prime radical of modules over commutative rings.

Keywords: radical, weakly prime radical, prime submodule, weakly prime submodule, commutative ring.

บทนำ

ทฤษฎีมอดูล (module theory) [1] เป็นสาขาแขนงหนึ่งของคณิตศาสตร์ที่มีพื้นฐานมาจากสาขาวิชาพีชคณิตนามธรรม (abstract algebra) และเป็นหนึ่งในวิชาคณิตศาสตร์ ที่กล่าวถึงกรุปสลับที่ (abelian group) M และ ริง (ring) R ที่สามารถสร้างฟังก์ชันจาก $R\times M$ ไปยัง M ($\cdot : R\times M \to M$) และมีสมบัติดังนี้

a) $(r+s)m = rm+sm$ สำหรับทุก $r,s\in R$ และ $m\in M$

b) $(rs)m = r(sm)$ สำหรับทุก $r,s\in R$ และ $m\in M$

c) $r(m+n) = rm+rn$ สำหรับทุก $r\in R$ และ $m,n\in M$

d) ถ้าริง (ring) R เป็นริงที่มีเอกลักษณ์ 1 แล้วจะมีสมบัติ $1m=m$ สำหรับทุก $m\in M$

มอดูย่อยแท้ N ของ R-Module M จะเรียกว่ามอดูลย่อยเฉพาะ (prime submodeile) [2, 3, 4, 5, 6] ก็ต่อเมื่อ สำหรับทุกทุก $r\in R$ และ $m\in M$ ถ้า $rm\in N$ แล้ว $m\in N$ หรือ

$$r\in(N:M)=\{a\in R \mid aM\subseteq N\}$$

มอดูลย่อยแท้ N ของ R-Module M จะเรียกว่ามอดูลย่อยเฉพาะแบบอ่อน (weakly prime submodule) [4, 5] ก็ต่อเมื่อสำหรับทุกทุกมูลย่อย K ของ M และ $a,b\in R$ ถ้า $abK\subseteq N$ แล้ว $aK\subseteq N$ หรือ $bK\subseteq N$ ราก (radical) [5, 7, 8, 9, 10] ของมอดูลย่อย N ใน R-Module M เขียนแทนด้วย $rad_M(N)$ คือ อินเตอร์เซกชันของทุกมอดูลย่อยเฉพาะ ที่มี N บรรจุ ในกรณีที่ไม่มีมอดูลย่อยเฉพาะใดเลยที่มี N บรรจุ เราจะให้ $rad_M(N)=M$ รากเฉพาะแบบอ่อนของมอดูล (weakly prime radical of module) [5] ของมอดูลย่อย N ใน R-Module M เขียนแทนด้วย $w.rad_M(N)$ คือ อินเตอร์เซกชันของทุกมอดูลย่อยเฉพาะแบบอ่อน ที่มี N บรรจุ ในกรณีที่ไม่มีมอดูลย่อยเฉพาะแบบอ่อนใดเลยที่มี N บรรจุ เราจะให้ $w.rad_M(N)=M$

M. Alkan และ Y. Tiras [2] ได้ศึกษาความสัมพันธ์ของราก ($rad_M(N)$) กับ สิ่งหุ้ม (envelope) ของมูลดูลย่อยแท้ ใน R-Module M

Z. Abd El-Bast และ PF. Smith [1] ได้แสดงว่าถ้ามอดูย่อยแท้ N ของ R-Module M เป็นมอดูลย่อยเฉพาะ ก็ต่อเมื่อ $(N:M)=\{r\in R \mid rM\subseteq N\}$ เป็นไอดีลเฉพาะ (prime ideal) ของ R เมื่อ M เป็นมอดูลการคูณบน R (multiplication R-Module M) และ R. Ameri [3] ได้กำหนดบทนิยามการคูณ (multiplication) ของมอดูลการคูณบน (multiplication module)

ในงานวิจัยฉบับนี้ ศึกษา ราก, รากเฉพาะแบบอ่อน, มอดูลย่อยเฉพาะและมอดูลย่อยเฉพาะแบบอ่อนของมอดูลบนริงสลับที่ แนวคิดเหล่านี้ถูกขยายมาจากมอดูลย่อยเฉพาะ, มอดูลย่อยเฉพาะอย่างอ่อนตามลำดับ งานวิจัยนี้ให้การจำแนกลักษณะเฉพาะบางประการของสิ่งที่ได้กล่าวไปข้างต้น นอกจากนี้ ศึกษาความสัมพันธ์ระหว่างรากและรากเฉพาะแบบอ่อนของมอดูลบนริงสลับที่

ผลการศึกษา

ในงานวิจัยนี้ได้แนวคิดมาจากการศึกษางานวิจัยของ M. Behbooid [5] ซึ่งได้กำหนดบทนิยามของรากเฉพาะแบบอ่อนของมอดูล (weakly prime radical of module) คืออินเตอร์เซกชันของทุกมอดูลย่อยเฉพาะแบบอ่อน (weakly prime submodule) ที่มี N บรรจุ ในกรณีที่ไม่มีมอดูลย่อยเฉพาะแบบอ่อน (weakly prime submodule) ใดเลยที่มี N บรรจุ จะกำหนดให้ $w.rad_M\left(N\right)=M$ ในหัวข้อนี้เราจะแสดงว่า $w.rad_M(N)\subseteq rad_M(N)$ เมื่อ M เป็น R-module และ N เป็นมอดูลย่อยของ M โดยผ่านบทตั้งและประพจน์ต่อไปนี้

สมบัติที่ 1. กำหนดให้ N และ K เป็นมอดูลย่อยของ R-module M แล้วจะได้ว่า

1. $w.rad_M(N)\subseteq w.rad_M(K)$ เมื่อ $N\subseteq K$
2. $w.rad_K(N)\subseteq w.rad_M(N)$ เมื่อ $N\subseteq K$
3. $w.rad_K(N)\subseteq w.rad_M(N)\subseteq w.rad_M(K)$ เมื่อ $N\subseteq K$
4. $w.rad_M(w.rad_M(N))=w.rad_M(N)$
5. $w.rad_M(N\cap K)\subseteq w.rad_M(N)\cap w.rad_M(K)$
6. $w.rad_M(N+K)=w.rad_M(N)+w.rad_M(K)$

พิสูจน์ กำหนดให้ N และ K เป็นมอดูลย่อยของ R-module M

1. จะแสดงว่า $w.rad_M(N)\subseteq w.rad_M(K)$ เมื่อ $N\subseteq K$ ถ้าไม่มีมอดูลย่อยเฉพาะแบบอ่อนที่บรรจุ K จะได้ว่า $w.rad_M(K)=M$ เนื่องจาก $w.rad_M(N)$ เป็นมอดูลย่อยของ M จะได้ว่า

$$w.rad_M(N)\subseteq M = w.rad_M(K)$$

ถ้ามีมอดูลย่อยเฉพาะแบบอ่อนที่บรรจุ K จะได้ว่า $w.rad_M(K)$ เป็นมอดูลย่อยของ M โดยที่

$$K\subseteq w.rad_M(K)$$

เนื่องจาก $N\subseteq K$ จะได้ว่า $N\subseteq w.rad_M(K)$ ดังนั้น $w.rad_M(N)\subseteq w.rad_M(K)$

2. เราจะแสดงว่า $w.rad_K(N)\subseteq w.rad_M(N)$ เมื่อ $N\subseteq K$ ถ้าไม่มีมอดูลย่อยเฉพาะแบบอ่อนที่บรรจุ N จะได้ว่า $w.rad_M(N)=M$ เนื่องจาก $w.rad_K(N)$ เป็นมอดูลย่อยของ K จะได้ว่า

$$w.rad_K(N)\subseteq K\subseteq M = w.rad_M(N)$$

ถ้ามีมอดูลย่อยเฉพาะแบบอ่อนที่บรรจุ N จะได้ว่า $w.rad_M(N)$ เป็นมอดูลย่อยของ M โดยที่

$$N \subseteq w.rad_M(N)$$

กำหนดให้ W เป็นมอดูลย่อยเฉพาะแบบอ่อนของ M ที่บรรจุ N เราจะแบ่งการพิสูจน์ออกเป็น 2 กรณีกล่าวคือ เป็นเซตย่อยของ W และ K ไม่เป็นเซตย่อยของ W ดังนี้

กรณีที่ 1 K เป็นเซตย่อยของ W

เนื่องจาก K เป็นเซตย่อยของ W และ $w.rad_K(N) \subseteq W$ ดังนั้นจะได้ว่าถ้า W เป็นมอดูลย่อยของ M บรรจุ N แล้ว $w.rad_K(N) \subseteq W$

กรณีที่ 2 K ไม่เป็นเซตย่อยของ W

เห็นได้ชัดเจนว่า $K \cap W$ เป็นมอดูลย่อยแบบอ่อนของ K เนื่องจาก $N \subseteq K \cap W$ จะได้ว่า

$$w.rad_K(N) \subseteq K \cap W \subseteq W$$

ดังนั้นจะได้ว่าถ้า W เป็นมอดูลย่อยของ M บรรจุ N แล้ว $w.rad_M(N) \subseteq W$ จากทั้ง 2 กรณี สามารถสรุปได้ว่า $w.rad_K(N) \subseteq w.rad_M(N)$

3. เราจะแสดงว่า $w.rad_K(N) \subseteq w.rad_M(N) \subseteq w.rad_M(K)$ จากข้อ 1 และข้อ 2 จะได้ว่า

$$w.rad_M(N) \subseteq w.rad_M(K)$$

และ

$$w.rad_K(N) \subseteq w.rad_M(N)$$

ดังนั้นจะได้ว่า $w.rad_K(N) \subseteq w.rad_M(N) \subseteq w.rad_M(K)$

4. เราจะแสดงว่า $w.rad_M(w.rad_M(N)) = w.rad_M(N)$ เห็นได้ชัดเจนว่า

$$w.rad_M(N) \subseteq w.rad_M(w.rad_M(N))$$

ต่อไปเราจะแสดงว่า $w.rad_M(w.rad_M(N)) \subseteq w.rad_M(N)$ ถ้าไม่มีมอดูลย่อยเฉพาะแบบอ่อนที่บรรจุ N แล้วจะได้ว่า $w.rad_M(N) = M$ ดังนั้นจะได้ว่า $w.rad_M(w.rad_M(N)) \subseteq w.rad_M(N)$ ถ้ามีมอดูลย่อยเฉพาะแบบอ่อนที่บรรจุ N แล้ว $w.rad_M(w.rad_M(N))$ คือมอดูลย่อยที่เล็กที่สุดที่บรรจุ $w.rad_M(N)$ แต่ $w.rad_M(N) \subseteq w.rad_M(N)$ จะได้ว่า $w.rad_M(w.rad_M(N)) \subseteq w.rad_M(N)$ สามารถสรุปได้ว่า $w.rad_M(w.rad_M(N)) = w.rad_M(N)$

5. เรากำลังแสดงว่า $w.rad_M(N \cap K) \subseteq w.rad_M(N) \cap w.rad_M(K)$ เนื่องจาก $N \cap K \subseteq N$ และ $N \cap K \subseteq K$ จะได้ว่า $w.rad_M(N \cap K) \subseteq wprad_M(N)$ และ $w.rad_M(N \cap K) \subseteq w.rad_M(K)$ สามารถสรุปได้ว่า

$$w.rad_M(N \cap K) \subseteq w.rad_M(N) \cap w.rad_M(K)$$

6. เรากำลังจะแสดงว่า $w.rad_M(N+K) = w.rad_M(N) + w.rad_M(K)$ เริ่มต้นเราจะแสดงว่า

$$w.rad_M(N+K) \subseteq w.rad_M(N) + w.rad_M(K)$$

เห็นได้ชัดเจนว่า $N + K \subseteq w.rad_M(N) + w.rad_M(K)$ ดังนั้น

$$w.rad_M(N+K) \subseteq w.rad_M(N) + w.rad_M(K)$$

ต่อไปจะแสดงว่า $w.rad_M(N) + w.rad_M(K) \subseteq w.rad_M(N+K)$

เนื่องจาก $N \subseteq N+K$ และ $K \subseteq N+K$ จะได้ว่า $w.rad_M(N) \subseteq w.rad_M(N+K)$ และ $w.rad_M(K) \subseteq w.rad_M(N+K)$

ดังนั้นจะได้ว่า $w.rad_M(N) + w.rad_M(K) \subseteq w.rad_M(N+K)$ สามารถสรุปได้ว่า

$$w.rad_M(N+K) = w.rad_M(N) + w.rad_M(K)$$

บทตั้งที่ 2. กำหนดให้ N เป็นมอดูลย่อยแท้ของ R-module M ถ้า P เป็นไอดีลแท้ของ R แล้วจะได้ว่า $PM+N \subseteq (N,P)=\{x\in M \mid cx\in PM+N, c\in R-P\}$

พิสูจน์ ให้ $x\in PM+N$ ดังนั้นจะได้ว่า $x=pm+n$ เมื่อ $p\in P, m\in M$ และ $n\in N$ ดังนั้นจะมี $1\in R-P, 1x=x=pm+n\in PM+N$

นั่นคือ $x\in (N,P)$ สามารถสรุปได้ว่า $PM+N\subseteq (N,P)=\{x\in M \mid cx\in PM+N, c\in R-P\}$

บทตั้งที่ 3. กำหนดให้ N เป็นมอดูลย่อยแท้ของ R-module M ถ้า P เป็นไอดีลแท้ของ R แล้วจะได้ว่า $(N,P)=\{x\in M \mid cx\in PM+N, c\in R-P\}$ เป็นมอดูลย่อยของ M

พิสูจน์ กำหนดให้ N เป็นมอดูลย่อยแท้ของ R-module M ถ้า P เป็นไอดีลของ R จาก บทตั้งที่ 2 จะได้ว่า $(N,P)\neq\varnothing$ ต่อไปเราจะแสดงสมบัติของมอดูลย่อยของ (N,P) ให้ $x,y\in (N,P)$ ดังนั้นจะมี $c_1,c_2\in R-P$ โดยที่ $c_1x, c_2y\in PM+N$ จะได้ว่า
$c_1x=p_1m_1+n_1$ และ $c_2x=p_2m_2+n_2$

สำหรับบาง $p_1,p_2\in P, m_1,m_2\in M$ และ $n_1,n_2\in N$ พิจารณา

$$\begin{aligned}
c_1rx &= r(c_1x)\\
&= r(p_1m_1+n_1)\\
&= rp_1m_1+rn_1\in PM+N
\end{aligned}$$

และ
$$\begin{aligned}
c_1c_2(x+y) &= c_1c_2x+c_1c_2y\\
&= c_2\left(c_1x\right)+c_1\left(c_2y\right)\\
&= c_2\left(p_1m_1+n_1\right)+c_1\left(p_2m_2+n_2\right)\\
&= c_2p_1m_1+c_2n_1+c_1p_2m_2+c_1n_2\\
&= \left(p_1c_2m_1+p_2c_1m_2\right)+\left(c_2n_1+c_1n_2\right)\in PM+PM+N+N
\end{aligned}$$

จะได้ว่า $c_1c_2(x+y)\in PM+N$ นั่นคือ $x+y\in (N,P)$ และ $rx\in (N,P)$ สามารถสรุปได้ว่า $(N,P)=\{x\in M \mid cx\in PM+N, c\in R-P\}$ เป็นมอดูลย่อยของ M

บทตั้งที่ 4. กำหนดให้ N เป็นมอดูลย่อยแท้ของ R-module M ถ้า P เป็นไอดีลเฉพาะของ R แล้วจะได้ว่า $(N,P)=M$ หรือ (N,P) เป็นมอดูลย่อยเฉพาะของ M

พิสูจน์ สมมติให้ N เป็นมอดูลย่อยแท้ของ R-module M และ P เป็นไอดีลเฉพาะของ R โดยที่ $(N,P)\neq M$ จะแสดงว่า (N,P) เป็นมอดูลย่อยเฉพาะแบบอ่อนของ M จากบทตั้งที่ 3 เราจะได้ว่า (N,P) เป็นมอดูลย่อยของ M ต่อไปจะแสดงสมบัติของมอดูลย่อยเฉพาะของ (N,P) ให้ $r\in R$ และ $m\in M$ โดยที่ $rm\in(N,P)$ เรากำลังจะแสดงว่า $m\in(N,P)$ หรือ $rM\subseteq(N,P)$ เนื่องจาก $rm\in(N,P)$ ดังนั้นจะมี $c\in R-P$ โดยที่ $crm\in PM+N$ เราจะแบ่งการพิสูจน์ออกเป็น 2 กรณี กล่าวคือ $r\in P$ หรือ $r\notin P$

กรณีที่ 1 $r\in P$
จากบทนิยามของ (N,P) เราจะได้ว่า $rM\subseteq PM\subseteq PM+N\subseteq(N,P)$ ดังนั้น $rM\subseteq(N,P)$

กรณีที่ 2 $r\notin P$
เนื่องจาก $c\in R-P$ และ $r\notin P$ จะได้ว่า $(cr)\notin P$ แต่ $crm\in PM+N$ นั่นคือ $m\in(N,P)$
เราสามารถสรุปได้ว่า (N,P) เป็นมอดูลย่อยเฉพาะของ M

บทแทรกที่ 5. กำหนดให้ N เป็นมอดูลย่อยแท้ของ R-module M ถ้า P เป็นไอดีลเฉพาะของ R แล้วจะได้ว่า $(N,P)=M$ หรือ (N,P) เป็นมอดูลย่อยเฉพาะแบบอ่อนของ M
พิสูจน์ เห็นได้ชัดเจนจากบทตั้งที่ 4

บทตั้งที่ 6. กำหนดให้ N เป็นมอดูลย่อยแท้ของ R-module M ถ้า P เป็นไอดีลเฉพาะของ R แล้วจะได้ว่า $w.rad_M(N)\subseteq\bigcap\{(N,P)\mid P$ เป็นไอดีลเฉพาะของ $R\}$

พิสูจน์ กำหนดให้ N เป็นมอดูลย่อยแท้ของ R-module M, P เป็นไอดีลเฉพาะของ R และให้ เป็น $B=\bigcap\{(K,P)\mid P$ ไอดีลเฉพาะของ $R\}$ เราจะแสดงว่า $w.rad_M(N)\subseteq B$ ให้ $m\in w.rad_M(N)$ จากบทแทรกที 5 จะได้ว่า $(N,P)=M$ หรือ (N,P) เป็นมอดูลย่อยเฉพาะแบบอ่อนของ M เราจะแบ่งการพิสูจน์ออกเป็น 2 กรณี ดังนี้

กรณีที่ 1 $(N,P)=M$
เนื่องจาก $(N,P)\quad M$ จะได้ว่า $m\in(N,P)$

กรณีที่ 2 $(N,P)\neq M$
เนื่องจาก $(N,P)\neq M$ จะได้ว่า (N,P) เป็นมอดูลย่อยเฉพาะแบบอ่อนของ M จากบทตั้งที่ 2 จะได้ว่า

$$N\subseteq PM+N\subseteq(N,P)=\{x\in M\mid cx\in PM+N, c\in R-P\}$$

นั่นคือ $m\in(K,P)$ สามารถสรุปได้ว่า $w.rad_M(N)\subseteq\bigcap\{(K,P)\mid P$ เป็นไอดีลเฉพาะของ $R\}$

บทตั้งที่ 7. กำหนดให้ N เป็นมอดูลย่อยแท้ของ R-module M ถ้า P เป็นไอดีลเฉพาะของ R แล้วจะได้ว่า $rad_M(N)=\bigcap\{(N,P)\mid P$ เป็นไอดีลเฉพาะของ $R\}$

พิสูจน์ กำหนดให้ N เป็นมอดูลย่อยแท้ของ R-module M ถ้า P เป็นไอดีลเฉพาะของ R และให้ $B=\bigcap\{(N,P)\mid P$ เป็นไอดีลเฉพาะของ $R\}$ เราจะแสดงว่า $B\subseteq rad_M(N)$ ถ้าไม่มีมอดูลย่อยเฉพาะของ M ที่บรรจุ N จะได้ว่า $rad_M(N)=M$ ดังนั้น $B\subseteq rad_M(N)$ ถ้ามีมอดูลย่อยเฉพาะของ M ที่บรรจุ N ให้ L เป็นมอดูลย่อยเฉพาะของ M ที่บรรจุ N และให้ $m\in B$ เนื่องจาก L เป็นมอดูลย่อยเฉพาะของ M เราจะได้ว่า $(L:M)$ เป็นไอดีลเฉพาะของ R ดังนั้นจะมี $c\in R$ โดยที่ $c\in R-(L:M)$ ซึ่ง $cm\in(L:M)M+N$ จะได้ว่า $cm=hs+k$ สำหรับบาง $h\in(L:M),s\in M$ และ $k\in N$ เนื่องจาก $hM\subseteq L$ และ $N\subseteq L$ จะได้ว่า $hs\in L$ และ $k\in L$ ดังนั้นจะได้ว่า $cm\in L$ เพราะว่า cM ไม่เป็นเซตย่อยของ L และ L เป็นมอดูลย่อยเฉพาะของ M แล้วจะได้ว่า $m\in L$ นั่นคือ $m\in rad_M(N)$ สามารถสรุปได้ว่า $B\subseteq rad_M(N)$ ต่อไปจะแสดงว่า $rad_M(N)\subseteq B$ ให้ $m\in rad_M(N)$ จากบทแทรกที่ 4 จะได้ว่า $(N,P)=M$ หรือ (N,P) เป็นมอดูลย่อยเฉพาะของ M เราจะแบ่งการพิสูจน์ออกเป็น 2 กรณี ดังนี้

กรณีที่ 1 $(N,P)=M$
เนื่องจาก $(N,P)=M$ จะได้ว่า $m\in(K,P)$

กรณีที่ 2 $(N,P)\neq M$
เนื่องจาก $(N,P)\neq M$ จะได้ว่า (N,P) เป็นมอดูลย่อยเฉพาะของ M จากบทตั้งที่ 2 จะได้ว่า
$N\subseteq PM+N\subseteq(N,P)=\{x\in M\mid cx\in PM+N,c\in R-P\}$
นั่นคือ $m\in(K,P)$ สามารถสรุปได้ว่า
$rad_M(N)\subseteq\bigcap\{(K,P)\mid P$ เป็นไอดีลเฉพาะของ $R\}$
สามารถสรุปได้ว่า $rad_M(N)=\bigcap\{(K,P)\mid P$ เป็นไอดีลเฉพาะของ $R\}$

ทฤษฎีบทที่ 8. กำหนดให้ N เป็นมอดูลย่อยแท้ของ R-module M จะได้ว่า
$w.rad_M(N)\subseteq rad_M(N)$

พิสูจน์ เป็นผลมาจากบทตั้งที่ 6 และบทตั้งที่ 7

สรุปผลและข้อเสนอแนะ

จากการจัดทำวิจัยมีวัตถุประสงค์เพื่อการนำความรู้มาใช้ให้เกิดประโยชน์ในการสร้างทฤษฎีบทต่าง ๆ ที่แตกต่างจากเดิมและได้ความสัมพันธ์ของรากและรากเฉพาะแบบอ่อนกล่าวคือสำหรับทุก ๆ รากเฉพาะแบบอ่อนจะเป็นรากในมอดูลที่มีเอกลักษณ์ ($w.rad_M(N) \subseteq rad_M(N)$) นอกจากนี้ยังมีข้อเสนอแนะในการทำงานวิจัยสำหรับผู้ที่สนใจดังนี้

1. ในการทำงานวิจัยนี้เราศึกษามอดูลบนริงสลับที่ที่มีเอกลักษณ์ในทำนองเดียวกันเราอาจไปศึกษาบนริง หรือ กึ่งริง ที่ไม่มีเอกลักษณ์

2. ในการทำวิจัยนี้เราศึกษาบน R-module ในทำนองเดียวกันเราอาจศึกษาบน (R,S)-module

เอกสารอ้างอิง

1. El-Bast, Z. and Smith, P.E. (1988). Multiplication modules. *Comm Algebra.* 16: 755-779.
2. Alkan, M. and Tiras, Y. (2007). On prime submodules. Rocky Mountain. *Journal of Mathematics.* 37: 709-722.
3. Ameri, R. (2003). On the prime submodules of multiplication modules. *Inter. J. of Math. and Mathematical Sciences*. 27: 1715–1724.
4. Anderson, D.D. and Smith, E. (2003). Weakly prime ideals. *Houston J. of Math.* 29: 831–840.
5. Behbooid, M. (2006). On weakly prime radical of modules and semi-compatible modules. *Acta Math. Hungar.* 113: 243-254.
6. Dauns, J. (1978). Prime modules. *J. reine Angew. Math.* 2: 156-181.
7. Jenkins, J. and Smith, P.F. (1992). On the prime radical of a module over a commutative ring. *Comm. Algebra.* 20: 3593–3602.
8. McCasland, R.L. and Moore, M.E. (1991). On radicals of submodules. *Comm. Algebra.*19: 1327-1341.
9. Pusat-Yilmaz, D. and Smith, P.E. (2002). Modules which satisfy the radical formula. *Acta Math. Hungar.* 95: 155-167.
10. Sharif, H., Sharifi, Y. and Namazi, S. (1996). Rings satisfying the radical formula, *Acta Math. Hungar.* 71: 103-108.
11. Sharp, R.Y. (1990). *Steps in Commutative Algebra.* London: Cambridge University Press.