ความสวยงามวางนัยทั่วไป : ผลบวกของผลการยกกำลังสองของจำนวนที่ทุกหลักเป็นเลข 6 กับจำนวนที่ทุกหลักเป็นเลข 6

Generalized Beauty : The Sum of The Square of The Numbers That Every Digit as 6 and The Numbers That Every Digit as 6

แสงประทีป นนกระโทก และ อัยเรศ เอี่ยมพันธ์

สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยพะเยา อ.เมือง จ.พะเยา 56000

บทคัดย่อ

บทความนี้มีวัตถุประสงค์เพื่อศึกษาและหารูปแบบทั่วไปของผลคูณของจำนวนที่ทุกหลักเป็นเลข **6** กับจำนวนเต็มบวกถัดไป เพื่อเพิ่มความสะดวกในการคำนวณและแสดงให้เห็นถึงความงดงามของการพิสูจน์และรูปแบบทั่วไปของผลคูณนี้ โดยทฤษฎีบทที่ใช้เป็นหลักในการพิสูจน์ คือหลักการอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ ผลการศึกษาพบว่ารูปแบบทั่วไปของผลคูณของจำนวนที่ทุกหลักเป็นเลข **6** กับจำนวนเต็มบวกถัดไปที่ได้จากการพิสูจน์จะขึ้นอยู่กับจำนวนของเลข **6** กับผลคูณของ **6** กับ **7** ยิ่งกว่านั้น ยังได้ศึกษารูปแบบทั่วไปของผลบวกของผลการยกกำลังสองของจำนวนที่ทุกหลักเป็นเลข **6** กับจำนวนที่ทุกหลักเป็นเลข **6** พร้อมทั้งเสนอแนวทางการขยายการศึกษาของบทความนี้ด้วย

คำสำคัญ: หลักการอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ จำนวนที่ทุกหลักเป็นเลข **6**

Abstract

The objective of this article is to study and nd a general form of the product of the numbers that every digit as **6** and the next positive integers, for ease of calculation and show the beauty of a proof and a general form of this product. The main theorem for proof is the Principle of Mathematical Induction. The results showed that the general form of the product of the numbers that every digit as **6** and the next positive integers obtained from the proof is depended on the number of **6** and the product of **6** and **7** . Moreover, a general form of the sum of the square of the numbers that every digit as **6** and the numbers that every digit as **6** was studied. The extension of this study was suggested in this article.

Keywords: Principle of Mathematical Induction, number that every digit as

บทนำและทฤษฎีบทที่เกี่ยวข้อง

การคำนวณหาค่าของผลบวก ผลคูณ หรือผลการยกกำลังสองของจำนวนที่มีหลายหลัก ถึงแม้ว่าจะเข้าใจในวิธีการที่ไม่ยากนัก แต่กลับเป็นเรื่องที่ยุ่งยากอย่างมากในการคำนวณ ฉะนั้นหากสามารถหาเครื่องมือที่เหมาะสมสำหรับการคำนวณที่ยุ่งยากบางอย่างได้ก็จะเป็นเรื่องที่เพิ่มความสะดวกให้มากขึ้น ด้วยเหตุนี้ จึงจะศึกษาและหารูปแบบทั่วไปที่แน่นอนสำหรับการคำนวณหาผลคูณของจำนวนที่ทุกหลักเป็นเลข **6** กับจำนวนเต็มบวกถัดไป (จำนวนที่ทุกหลักเป็นเลข **6** ยกเว้นหลักหน่วยเป็นเลข **7**) ที่ได้สังเกตพบความสัมพันธ์บางอย่างที่น่าสนใจ ซึ่งจะกล่าวถึงในหัวข้อต่อไป และหากสามารถหารูปแบบทั่วไปที่แน่นอนหรือสูตรได้ ก็จะเป็นการเพิ่มความสะดวกให้มากขึ้นสำหรับการคำนวณหาผลคูณนี้นั่นเอง โดยเครื่องมือหลักที่ใช้ในการสร้างจำนวนเศษเหลือและการพิสูจน์ คือ ขั้นตอนวิธีการหาร และหลักการอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ ซึ่งกล่าวไว้ดังนี้

ทฤษฎีบท 1 ขั้นตอนวิธีการหาร (The Division Algorithm) [1] ถ้า a และ b เป็นจำนวนเต็ม ซึ่ง $b \neq 0$ แล้วมีจำนวนเต็ม q และ r เพียงจำนวนเดียว ซึ่ง $a = bq + r$ และ $0 \leq r < |b|$

ทฤษฎีบท 2 หลักการอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ (The Principle of Mathematical Induction) [1] กำหนดให้ $P(n)$ แทนข้อความเกี่ยวกับจำนวนเต็มบวก n และกำหนดให้ n_0 เป็นจำนวนเต็มบวก ซึ่งสอดคล้องกับข้อความต่อไปนี้

(1) $P(n_0)$ เป็นจริง

(2) ถ้า $P(k)$ เป็นจริง $k \geq n_0$ สำหรับจำนวนเต็มบวก แล้ว $P(k+1)$ เป็นจริง

สรุปได้ว่า $P(n)$ เป็นจริง สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก $n \geq n_0$

ต่อไปจะแนะนำให้รู้จักกับจำนวนเศษเหลือ ซึ่งเป็นเครื่องมือที่สำคัญสำหรับการขยายการศึกษาของบทความนี้ โดยดูการศึกษาของจำนวนเศษเหลือได้จาก [3] และ [4]

จากขั้นตอนวิธีการหาร ณัฐวุฒิ และอัยเรศ [2] และอัยเรศ [4] ได้นิยาม **จำนวนเศษเหลือ** (remainder number) ดังนี้ กำหนดให้ a เป็นจำนวนเต็มบวกใดๆ และ $b = 10$ จะได้ว่ามีจำนวนเต็ม q (ผลหาร) และ r (เศษเหลือ) ซึ่ง $a = 10 \cdot q + r$ และ $0 \leq r < 10$ ฉะนั้น r เป็นเลขหนึ่งหลักหรือเลขโดดนั่นเอง นิยามจำนวนเศษเหลือสำหรับ a โดย $a := {}_q r$ (I) เช่น

$0 = {}_0 0$	$10 = {}_1 0$	$20 = {}_2 0$	$100 = {}_{10} 0$	$250 = {}_{25} 0$	$3600 = {}_{360} 0$
$1 = {}_0 1$	$11 = {}_1 1$	$21 = {}_2 1$	$101 = {}_{10} 1$	$251 = {}_{25} 1$	$3601 = {}_{360} 1$
$2 = {}_0 2$	$12 = {}_1 2$	$22 = {}_2 2$	$102 = {}_{10} 2$	$252 = {}_{25} 2$	$3602 = {}_{360} 2$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$9 = {}_0 9$	$19 = {}_1 9$	$29 = {}_2 9$	$109 = {}_{10} 9$	$259 = {}_{25} 9$	$3609 = {}_{360} 9$

เพื่อความสะดวก สามารถเขียนจำนวนเศษเหลือ ${}_0 r$ ด้วย r สำหรับทุกจำนวนเต็ม $0 \leq r < 10$ และเพื่อให้เข้าใจในผลลัพธ์ของการประยุกต์ใช้ทฤษฎีบทจากบทความนี้ จะแนะนำการแปลงจำนวนเศษเหลือที่ได้จาก (I) กลับเป็นเลขฐานสิบปกติ เนื่องจากจำนวนเศษเหลือเป็นจำนวนที่เลขในแต่ละหลักอาจจะไม่ใช่เลขโดด ซึ่งมีค่ามากกว่าหรือเท่ากับสิบ แต่จำนวนในระบบเลขฐานสิบเป็นจำนวนที่เลขในแต่ละหลักเป็นเลขโดด และจากหลักการบวกเลขปกติ หากผลบวกมีค่ามากกว่าหรือเท่ากับสิบและเขียนเป็นจำนวนเศษเหลือ ${}_q r$ เมื่อ q คือผลหาร และ r คือเศษเหลือ (เลขโดด) จากการหารด้วยเลข 10 แล้วนำผลหาร q ไปทดที่หลักหน้า ฉะนั้นจึงสรุปเป็นวิธีการแปลงจำนวนเศษเหลือกลับเป็นเลขฐานสิบปกติได้โดยการบวกทแยงจากเศษเหลือตัวขวากับผล

หารตัวซ้าย ซึ่งก็คือการทดเลขปกตินั่นเอง เพื่อให้เข้าใจได้ง่ายขอยกตัวอย่างการแปลงจำนวน $2_3 57_1 9_8 9_2 645$ ที่ได้จากการเรียงกันของจำนวนเศษเหลือกลับเป็นเลขฐานสิบ ดังนี้

$$\begin{aligned} 2_3 57_1 9_8 9_2 645 &= (2+3)5(7+1)(9+8)(9+2)645 \\ &= 558_1 7_1 1645 \\ &= 55(8+1)(7+1)1645 \\ &= 55981645 \end{aligned}$$

ในการศึกษาหัวข้อถัดไปจะใช้สัญลักษณ์ $\#(n)$ แทนจำนวนของ n ที่เรียงติดกัน สำหรับทุกจำนวนเต็ม n เช่น $\#(6)$ แทนจำนวนของเลข 6 ที่เรียงติดกัน, แทนจำนวนของเลข $\#(4)$ ที่เรียงติดกัน และ $\#(2)$ แทนจำนวนของเลข 2 ที่เรียงติดกันในสมการ

$$\underbrace{66666}_{\#(6)=5} \times \underbrace{6666}_{\#(6)=4}7 = \underbrace{44444}_{\#(4)=5}\underbrace{22222}_{\#(2)=5}$$

และจะแสดงผลการศึกษาหลักของบทความนี้ ซึ่งประกอบด้วยข้อสังเกตที่พบความสัมพันธ์ของผลคูณของจำนวนที่ทุกหลักเป็นเลข 6 กับจำนวนเต็มบวกถัดไป จนนำไปสู่การศึกษาและการพิสูจน์ทฤษฎีบทหลัก อีกทั้งยังให้ตัวอย่างที่ได้ประยุกต์ใช้ทฤษฎีบทหลักด้วย

ข้อสังเกตของรูปแบบทั่วไปที่แน่นอน

จากการสังเกตผลคูณของจำนวนที่ทุกหลักเป็นเลข 6 กับจำนวนเต็มบวกถัดไป ทำให้พบความสัมพันธ์ที่น่าสนใจ ดังนี้

$$\left.\begin{array}{lcccccl}
\#(6)=0: & 6 & \times & 7 & = & 42 & :\#(4)=\#(2)=1 \\
\#(6)=1: & 66 & \times & 67 & = & 4422 & :\#(4)=\#(2)=2 \\
\#(6)=2: & 666 & \times & 667 & = & 444222 & :\#(4)=\#(2)=3 \\
\#(6)=3: & 6666 & \times & 6667 & = & 44442222 & :\#(4)=\#(2)=4 \\
\#(6)=4: & 66666 & \times & 66667 & = & 4444422222 & :\#(4)=\#(2)=5 \\
\#(6)=5: & 666666 & \times & 666667 & = & 444444222222 & :\#(4)=\#(2)=6 \\
\#(6)=6: & 6666666 & \times & 6666667 & = & 44444442222222 & :\#(4)=\#(2)=7 \\
\#(6)=7: & 66666666 & \times & 66666667 & = & 4444444422222222 & :\#(4)=\#(2)=8 \\
\#(6)=8: & 666666666 & \times & 666666667 & = & 444444444222222222 & :\#(4)=\#(2)=9 \\
\#(6)=9: & 6666666666 & \times & 6666666667 & = & 44444444442222222222 & :\#(4)=\#(2)=10
\end{array}\right\} \text{(II)}$$

จากผลคูณใน (II) จะสังเกตเห็นว่าจำนวนของเลข 6 ของจำนวน $\underbrace{666\ldots6}_{\#(6)=n}7$ มีผลต่อผลคูณของจำนวนที่ทุกหลักเป็นเลข 6 กับจำนวนเต็มบวกถัดไป โดยผลคูณนี้จะเป็นจำนวนที่มีจำนวนหลักเป็นเลขคู่ ซึ่งหลักครึ่งซ้ายเป็นเลข 4 ทั้งหมด และหลักครึ่งขวาเป็นเลข 2 ทั้งหมดเช่นกัน นั่นคือ ผลคูณนี้เท่ากับ $\underbrace{444\ldots4}_{\#(4)=n}\underbrace{222\ldots2}_{\#(2)=n}$ เมื่อ $0 \le n \le 9$

ตัวอย่างต่อไปนี้สนับสนุนข้อสังเกต และนำไปสู่การศึกษาหารูปแบบทั่วไปที่แน่นอนของผลคูณของจำนวนที่ทุกหลักเป็นเลข 6 กับจำนวนเต็มบวกถัดไปในบทความนี้

ตัวอย่าง 3 ผลลัพธ์ของ $\underbrace{6666666666}_{\#(6)=10}6\times\underbrace{6666666666}_{\#(6)=10}7$ สามารถคำนวณหาได้ถูกต้องจากข้อสังเกต เนื่องจาก $\#(6)=10$ จะได้ว่าผลคูณนี้มีจำนวนหลักเท่ากับยี่สิบสอง โดยสิบเอ็ดหลักทางซ้ายเป็นเลข 4 ทั้งหมด และสิบเอ็ดหลักทางขวาเป็นเลข 2 ทั้งหมด นั่นคือ

$$\underbrace{6666666666}_{\#(6)=10}6\times\underbrace{6666666666}_{\#(6)=10}7=\underbrace{44444444444}_{\#(4)=11}\underbrace{22222222222}_{\#(2)=11}$$

ตรวจคำตอบด้วยคอมพิวเตอร์

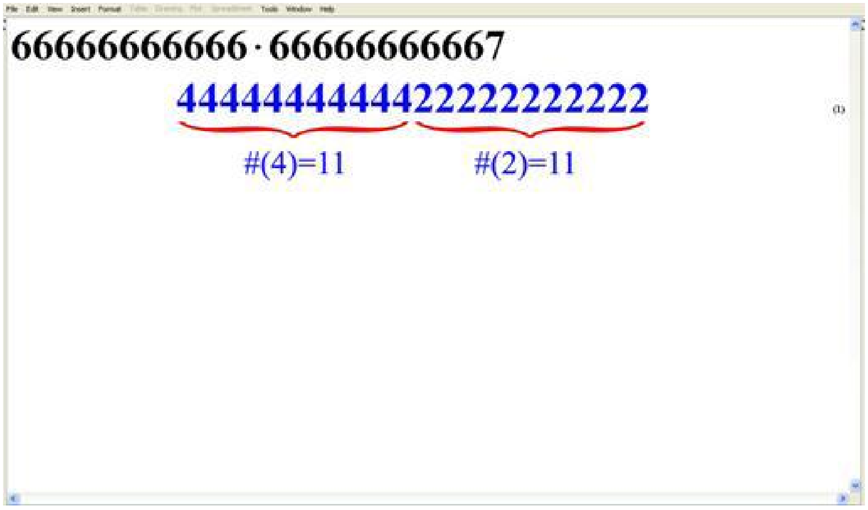

Figure 1. Multiplier of $\underbrace{6666666666}_{\#(6)=10}6\times\underbrace{6666666666}_{\#(6)=10}7$

จากข้อสังเกตและตัวอย่าง 3 จึงสรุปเป็นข้อสงสัยดังต่อไปนี้

(1) สามารถเขียนรูปแบบทั่วไปที่แน่นอนของผลคูณของจำนวนที่ทุกหลักเป็นเลข 6 กับจำนวนเต็มบวกถัดไป ได้หรือไม่

(2) หากสามารถเขียนรูปแบบทั่วไปที่แน่นอนของผลคูณของจำนวนที่ทุกหลักเป็นเลข 6 กับจำนวนเต็มบวกถัดไปได้ แล้วรูปแบบทั่วไปของผลคูณที่ได้จะมีลักษณะเหมือนกับข้อสังเกตที่พบหรือไม่

ก่อนที่จะตอบข้อสงสัยสองข้อ จะกล่าวถึงบทตั้ง 4 และ 6 ซึ่งเป็นบทตั้งที่มีความสำคัญอย่างมากสำหรับการพิสูจน์ทฤษฎีบทหลักเพื่อตอบข้อสงสัยทั้งสองข้อ พร้อมทั้งให้ตัวอย่างที่ได้ประยุกต์ใช้บทตั้งทั้งสองและตรวจคำตอบที่ได้จากบทตั้งด้วยโปรแกรมคอมพิวเตอร์

บทตั้ง 4 สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก n จะได้ว่า

$$6\underbrace{000\ldots0}_{\#(0)=n}\times\underbrace{666\ldots6}_{\#(6)=n-1}7=4\underbrace{000\ldots0}_{\#(0)=n-1}2\underbrace{000\ldots0}_{\#(0)=n} \quad \text{(III)}$$

การพิสูจน์ กำหนดให้ $P(n)$ แทนข้อความ

$$6\underbrace{000\ldots0}_{\#(0)=n}\times\underbrace{666\ldots6}_{\#(6)=n-1}7=4\underbrace{000\ldots0}_{\#(0)=n-1}2\underbrace{000\ldots0}_{\#(0)=n}$$

สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก n พบว่า

$$60\times7=420=4\underbrace{000\ldots0}_{\#(0)=1-1=0}2\underbrace{0}_{\#(0)=1}$$

จะได้ว่า $P(1)$ เป็นจริง กำหนดให้ k เป็นจำนวนเต็มบวก ซึ่ง $P(k)$ เป็นจริง จะได้ว่า

$$6\underbrace{000\ldots0}_{\#(0)=k}\times\underbrace{666\ldots6}_{\#(6)=k-1}7=4\underbrace{000\ldots0}_{\#(0)=k-1}2\underbrace{000\ldots0}_{\#(0)=k}$$

จะแสดงว่า $P(k+1)$ เป็นจริง

พิจารณา

$$
\begin{aligned}
6\underbrace{000\ldots0}_{\#(0)=k+1}\times\underbrace{666\ldots6}_{\#(6)=k}7 &= \left(6\underbrace{000\ldots0}_{\#(0)=k}\times 10\right)\times\left(6\underbrace{000\ldots0}_{\#(0)=k}+\underbrace{666\ldots6}_{\#(6)=k-1}7\right)\\
&= \left(36\underbrace{000\ldots0}_{\#(0)=2k}\times 10\right)+\left(6\underbrace{000\ldots0}_{\#(0)=k}\times\underbrace{666\ldots6}_{\#(6)=k-1}7\times 10\right)\\
&= \left(36\underbrace{000\ldots0}_{\#(0)=2k+1}\right)+\left(4\underbrace{000\ldots0}_{\#(0)=k-1}2\underbrace{000\ldots0}_{\#(0)=k}\times 10\right)\\
&= 36\underbrace{000\ldots0}_{\#(0)=2k+1}+4\underbrace{000\ldots0}_{\#(0)=k-1}2\underbrace{000\ldots0}_{\#(0)=k+1}\\
&= 4\underbrace{000\ldots0}_{\#(0)=k}2\underbrace{000\ldots0}_{\#(0)=k+1}
\end{aligned}
$$

ฉะนั้น $P(k+1)$ เป็นจริง โดยหลักการอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ จะได้ว่า

$$6\underbrace{000\ldots0}_{\#(0)=n}\times\underbrace{666\ldots6}_{\#(6)=n-1}7=4\underbrace{000\ldots0}_{\#(0)=n-1}2\underbrace{000\ldots0}_{\#(0)=n}$$

สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก n

ตัวอย่าง 5 จงหา $6\underbrace{000\ldots0}_{\#(0)=50}\times\underbrace{666\ldots6}_{\#(6)=49}7$

วิธีทำ โดยบทตั้ง 4 จะได้ว่า

$$6\underbrace{000\ldots0}_{\#(0)=50}\times\underbrace{666\ldots6}_{\#(6)=49}7=4\underbrace{000\ldots0}_{\#(0)=49}2\underbrace{000\ldots0}_{\#(0)=50}$$

ตรวจคำตอบด้วยคอมพิวเตอร์

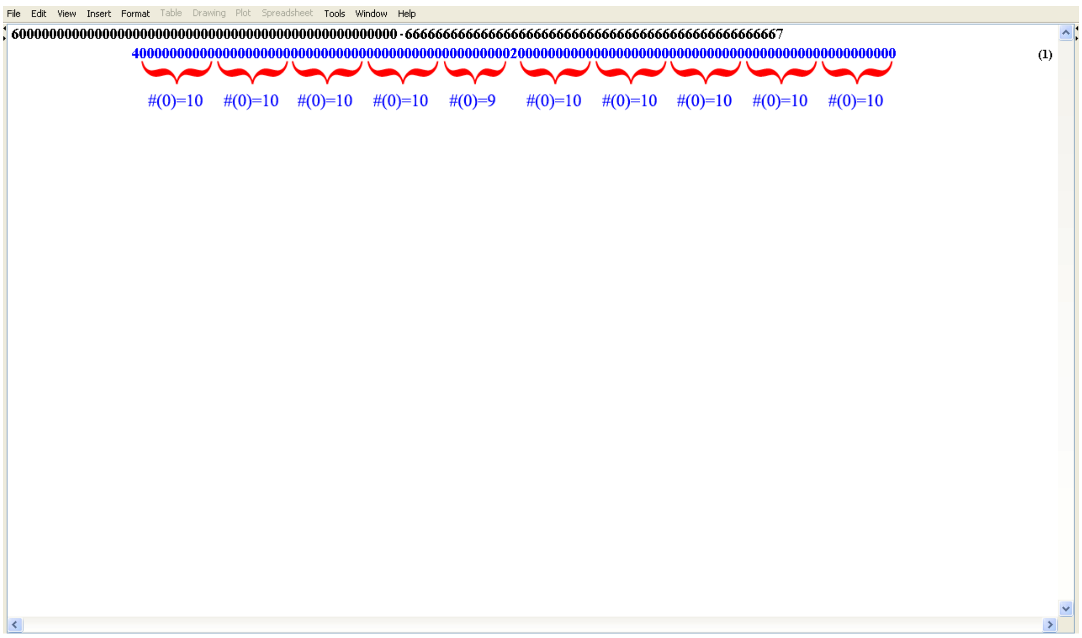

Figure 2. Multiplier of $6\underbrace{000\ldots0}_{\#(0)=50}\times\underbrace{666\ldots6}_{\#(6)=49}7$

บทตั้ง 6 สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก n จะได้ว่า

$$\underbrace{666\ldots6}_{\#(6)=n-1}6\times6\underbrace{000\ldots0}_{\#(0)=n}=3\underbrace{999\ldots9}_{\#(9)=n-1}6\underbrace{000\ldots0}_{\#(0)=n} \quad \text{(IV)}$$

การพิสูจน์ กำหนดให้ $P(n)$ แทนข้อความ

$$\underbrace{666\ldots6}_{\#(6)=n-1}6\times6\underbrace{000\ldots0}_{\#(0)=n}=3\underbrace{999\ldots9}_{\#(9)=n-1}6\underbrace{000\ldots0}_{\#(0)=n}$$

สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก n

พบว่า $6\times60=360=3\underbrace{999\ldots9}_{\#(9)=1-1=0}6\underbrace{0}_{\#(0)=1}$

จะได้ว่า $P(1)$ เป็นจริง k กำหนดให้ เป็นจำนวนเต็มบวก ซึ่ง $P(k)$ เป็นจริง

จะได้ว่า $\underbrace{666\ldots6}_{\#(6)=k-1}6\times6\underbrace{000\ldots0}_{\#(0)=k}=3\underbrace{999\ldots9}_{\#(9)=k-1}6\underbrace{000\ldots0}_{\#(0)=k}$

จะแสดงว่า $P(k+1)$ เป็นจริง พิจารณา

$$\begin{aligned}
\underbrace{666\ldots6}_{\#(6)=k}6\times6\underbrace{000\ldots0}_{\#(0)=k+1} &= \left(6\underbrace{000\ldots0}_{\#(0)=k}+\underbrace{666\ldots6}_{\#(6)=k-1}\right)\times\left(6\underbrace{000\ldots0}_{\#(0)=k}\times10\right)\\
&= \left(36\underbrace{000\ldots0}_{\#(0)=2k}\times10\right)+\left(\underbrace{666\ldots6}_{\#(6)=k-1}6\times6\underbrace{000\ldots0}_{\#(0)=k}\times10\right)\\
&= \left(36\underbrace{000\ldots0}_{\#(0)=2k+1}\right)+\left(3\underbrace{999\ldots9}_{\#(9)=k-1}6\underbrace{000\ldots0}_{\#(0)=k}\times10\right)\\
&= 36\underbrace{000\ldots0}_{\#(0)=2k+1}+3\underbrace{999\ldots9}_{\#(9)=k-1}6\underbrace{000\ldots0}_{\#(0)=k+1}\\
&= 3\underbrace{999\ldots9}_{\#(9)=k}6\underbrace{000\ldots0}_{\#(0)=k+1}
\end{aligned}$$

ฉะนั้น $P(k+1)$ เป็นจริง โดยหลักการอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ จะได้ว่า $\underbrace{666\ldots6}_{\#(6)=n-1}6\times6\underbrace{000\ldots0}_{\#(0)=n}=3\underbrace{999\ldots9}_{\#(9)=n-1}6\underbrace{000\ldots0}_{\#(0)=n}$ สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก n

ตัวอย่าง 7 จงหา $\underbrace{666\ldots6}_{\#(6)=49}6\times6\underbrace{000\ldots0}_{\#(0)=50}$

วิธีทำ โดยบทตั้ง 6 จะได้ว่า

$$\underbrace{666\ldots6}_{\#(6)=49}6\times6\underbrace{000\ldots0}_{\#(0)=50}=3\underbrace{999\ldots9}_{\#(9)=49}6\underbrace{000\ldots0}_{\#(0)=50}$$

ตรวจคำตอบด้วยคอมพิวเตอร์

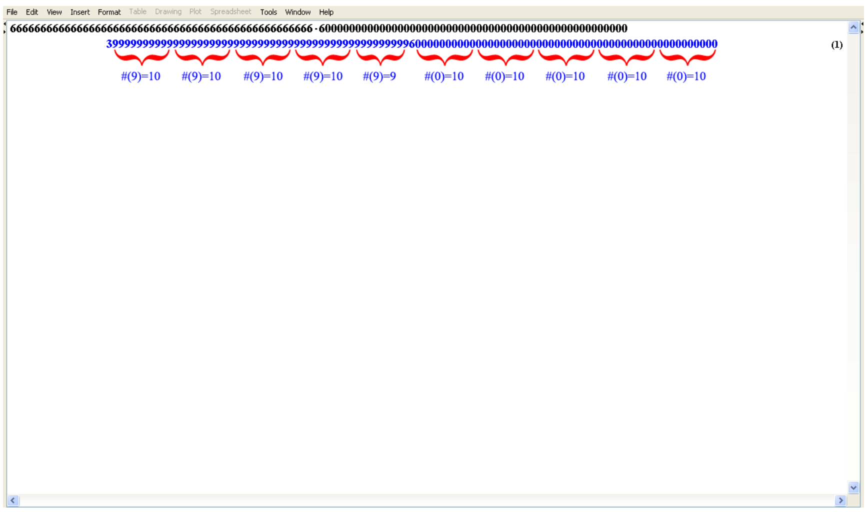

Figure 3. Multiplier of $\underbrace{666\ldots6}_{\#(6)=49}6\times6\underbrace{000\ldots0}_{\#(0)=50}$

โดยบทตั้ง 4 และ 6 ทำให้สามารถพิสูจน์ทฤษฎีบทหลักของบทความนี้ได้ ดังนี้

ทฤษฎีบท 8 สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก n จะได้ว่า

$$\underbrace{666\ldots6}_{\#(6)=n-1}6\times\underbrace{666\ldots6}_{\#(6)=n-1}7=\underbrace{444\ldots4}_{\#(4)=n}\underbrace{222\ldots2}_{\#(2)=n} \qquad \text{(V)}$$

การพิสูจน์ กำหนดให้ $P(n)$ แทนข้อความ

$$\underbrace{666\ldots6}_{\#(6)=n-1}6\times\underbrace{666\ldots6}_{\#(6)=n-1}7=\underbrace{444\ldots4}_{\#(4)=n}\underbrace{222\ldots2}_{\#(2)=n}$$

สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก n

พบว่า $6\times7=42=\underbrace{4}_{\#(4)=1}\underbrace{2}_{\#(2)=1}$

จะได้ว่า $P(1)$ เป็นจริง กำหนดให้ k เป็นจำนวนเต็มบวก ซึ่ง $P(k)$ เป็นจริง จะได้ว่า

$$\underbrace{666\ldots6}_{\#(6)=k-1}6\times\underbrace{666\ldots6}_{\#(6)=k-1}7=\underbrace{444\ldots4}_{\#(4)=k}\underbrace{222\ldots2}_{\#(2)=k}$$

จะแสดงว่า $P(k+1)$ เป็นจริง พิจารณา

$$\begin{aligned}
\underbrace{666\ldots6}_{\#(6)=k}6\times\underbrace{666\ldots6}_{\#(6)=k}7 &= \left(6\underbrace{000\ldots0}_{\#(0)=k}+\underbrace{666\ldots6}_{\#(6)=k-1}6\right)\times\left(6\underbrace{000\ldots0}_{\#(0)=k}+\underbrace{666\ldots6}_{\#(6)=k-1}7\right)\\
&= \left(36\underbrace{000\ldots0}_{\#(0)=2k}\right)+\left(6\underbrace{000\ldots0}_{\#(0)=k}\times\underbrace{666\ldots6}_{\#(6)=k-1}7\right)+\\
&\quad \left(\underbrace{666\ldots6}_{\#(6)=k-1}6\times6\underbrace{000...0}_{\#(0)=k}\right)+\left(\underbrace{666\ldots6}_{\#(6)=k-1}6\times\underbrace{666\ldots6}_{\#(6)=k-1}7\right)\\
&= 36\underbrace{000\ldots0}_{\#(0)=2k}+4\underbrace{000\ldots0}_{\#(0)=k-1}2\underbrace{000\ldots0}_{\#(0)=k}+\\
&\quad 3\underbrace{999\ldots9}_{\#(9)=k-1}6\underbrace{000\ldots0}_{\#(0)=k}+\underbrace{444\ldots4}_{\#(4)=k}\underbrace{222\ldots2}_{\#(2)=k}\\
&= 36\underbrace{000\ldots0}_{\#(0)=2k}+7\underbrace{999\ldots9}_{\#(9)=k-1}8\underbrace{000\ldots0}_{\#(0)=k}+\underbrace{444\ldots4}_{\#(4)=k}\underbrace{222\ldots2}_{\#(2)=k}\\
&= \underbrace{444\ldots4}_{\#(4)=k+1}\underbrace{222\ldots2}_{\#(2)=k+1}
\end{aligned}$$

ฉะนั้น $P(k+1)$ เป็นจริง โดยหลักการอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ จะได้ว่า $\underbrace{666\ldots6}_{\#(6)=n-1}6\times\underbrace{666\ldots6}_{\#(6)=n-1}7=\underbrace{444\ldots4}_{\#(4)=n}\underbrace{222\ldots2}_{\#(2)=n}$ สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก n

ต่อไปจะให้ตัวอย่างการคำนวณหาผลคูณของจำนวนที่ทุกหลักเป็นเลข 6 กับจำนวนเต็มบวกถัดไป โดยประยุกต์ใช้ทฤษฎีบท 8 และตรวจคำตอบที่ได้จากทฤษฎีบท 8 ด้วยโปรแกรมคอมพิวเตอร์

ตัวอย่าง 9 จงหา $\underbrace{666\ldots6}_{\#(6)=49}6\times\underbrace{666\ldots6}_{\#(6)=49}7$

วิธีทำ โดยทฤษฎีบท 8 จะได้ว่า

$$\underbrace{666\ldots6}_{\#(6)=49}6\times\underbrace{666\ldots6}_{\#(6)=49}7=\underbrace{444\ldots4}_{\#(4)=50}\underbrace{222\ldots2}_{\#(2)=50}$$

ตรวจคำตอบด้วยคอมพิวเตอร์

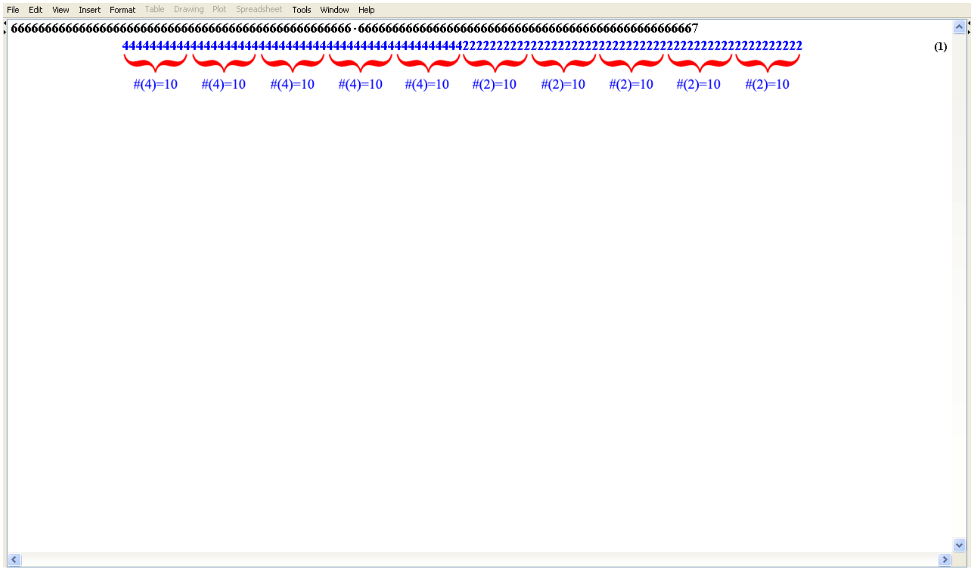

Figure 4. Multiplier of $\underbrace{666\ldots6}_{\#(6)=49}6\times\underbrace{666\ldots6}_{\#(6)=49}7$

โดยทฤษฎีบท 8 สามารถจัดรูปผลคูณให้อยู่ในพจน์ของจำนวนที่ทุกหลักเป็นเลข ได้และสรุปเป็นบทแทรก 10 ได้ดังนี้

บทแทรก 10 สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก n จะได้ว่า

$$\left(\underbrace{666\ldots6}_{\#(6)=n}\right)^2+\underbrace{666\ldots6}_{\#(6)=n}=\underbrace{444\ldots4}_{\#(4)=n}\underbrace{222\ldots2}_{\#(2)=n} \qquad \text{(VI)}$$

การพิสูจน์ โดยทฤษฎีบท 8 จะได้ว่า

$$\begin{aligned}\left(\underbrace{666\ldots6}_{\#(6)=n}\right)^2+\underbrace{666\ldots6}_{\#(6)=n} &= \underbrace{666\ldots6}_{\#(6)=n}\times\left(\underbrace{666\ldots6}_{\#(6)=n}+1\right)\\ &= \underbrace{666\ldots6}_{\#(6)=n-1}6\times\underbrace{666\ldots6}_{\#(6)=n-1}7\\ &= \underbrace{444\ldots4}_{\#(4)=n}\underbrace{222\ldots2}_{\#(2)=n}\end{aligned}$$

ในทำนองเดียวกันกับการศึกษาหารูปแบบทั่วไปที่แน่นอนของผลคูณของจำนวนที่ทุกหลักเป็นเลขกับจำนวนเต็มบวกถัดไป สามารถศึกษาและหารูปแบบทั่วไปที่แน่นอนของผลคูณของจำนวนที่ทุกหลักเป็นเลขกับจำนวนเต็มบวกถัดไปได้ และได้รับผลการศึกษาดังนี้

ทฤษฎีบท 11 สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก n จะได้ว่า

$$\underbrace{333\ldots3}_{\#(3)=n-1}3\times\underbrace{333\ldots3}_{\#(3)=n-1}4=\underbrace{111\ldots1}_{\#(1)=n}\underbrace{222\ldots2}_{\#(2)=n} \qquad \text{(VII)}$$

ตัวอย่าง 12 จงหา $\underbrace{333\ldots3}_{\#(3)=39}3\times\underbrace{333\ldots3}_{\#(3)=39}4$

วิธีทำ โดยทฤษฎีบท 11 จะได้ว่า

$$\underbrace{333\ldots3}_{\#(3)=39}3\times\underbrace{333\ldots3}_{\#(3)=39}4=\underbrace{111\ldots1}_{\#(1)=40}\underbrace{222\ldots2}_{\#(2)=40}$$

ตรวจคำตอบด้วยคอมพิวเตอร์

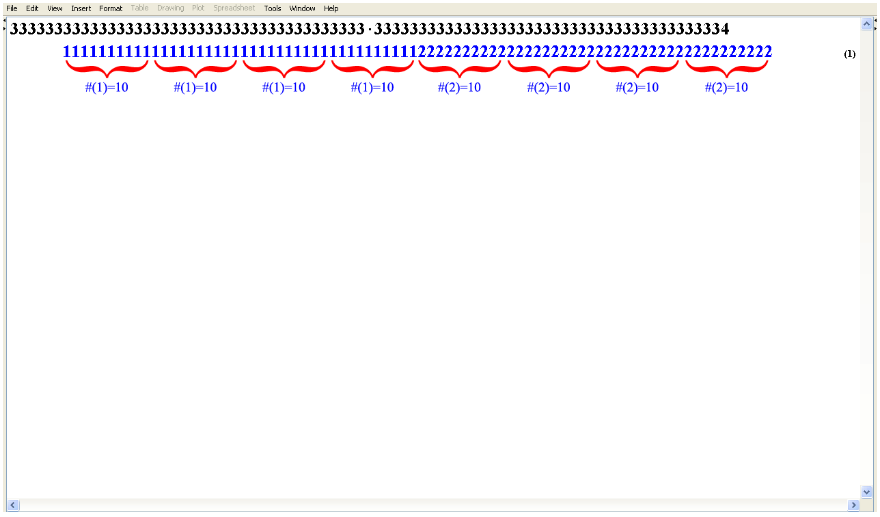

Figure 5. Multiplier of $\underbrace{333\ldots3}_{\#(3)=39}3\times\underbrace{333\ldots3}_{\#(3)=39}4$

โดยทฤษฎีบท 11 จะได้รับบทแทรก 13 ทันที ดังนี้

บทแทรก 13 สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก n จะได้ว่า

$$\left(\underbrace{333\ldots3}_{\#(3)=n}\right)^2+\underbrace{333\ldots3}_{\#(3)=n}=\underbrace{111\ldots1}_{\#(1)=n}\underbrace{222\ldots2}_{\#(2)=n} \qquad \text{(VIII)}$$

จึงเขียนแสดงความสัมพันธ์ของผลคูณของจำนวนที่ทุกหลักเป็นเลข 3 กับจำนวนเต็มบวกถัดไปได้เช่นเดียวกับ (II) โดยขึ้นอยู่กับจำนวนของเลข 3 ของจำนวน $\underbrace{333\ldots3}_{\#(3)=n}4$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มบวก ดังนี้

$$\left.\begin{array}{rcccccccl}
\#(3)=0: & 3 & \times & 4 & = & 12 & :\#(1)=\#(2)=1 \\
\#(3)=1: & 33 & \times & 34 & = & 1122 & :\#(1)=\#(2)=2 \\
\#(3)=2: & 333 & \times & 334 & = & 111222 & :\#(1)=\#(2)=3 \\
\#(3)=3: & 3333 & \times & 3334 & = & 11112222 & :\#(1)=\#(2)=4 \\
\#(3)=4: & 33333 & \times & 33334 & = & 1111122222 & :\#(1)=\#(2)=5 \\
\#(3)=5: & 333333 & \times & 333334 & = & 111111222222 & :\#(1)=\#(2)=6 \\
\#(3)=6: & 3333333 & \times & 3333334 & = & 11111112222222 & :\#(1)=\#(2)=7 \\
\#(3)=7: & 33333333 & \times & 33333334 & = & 1111111122222222 & :\#(1)=\#(2)=8 \\
\#(3)=8: & 333333333 & \times & 333333334 & = & 111111111222222222 & :\#(1)=\#(2)=9 \\
\#(3)=9: & 3333333333 & \times & 3333333334 & = & 11111111112222222222 & :\#(1)=\#(2)=10
\end{array}\right\} \quad \text{(IX)}$$

บทสรุปและแนวทางการพัฒนาการศึกษา

จากข้อสงสัยดังกล่าวจนกระทั่งสามารถพิสูจน์ข้อสังเกตเป็นรูปแบบทั่วไปที่แน่นอนของผลคูณของจำนวนที่ทุกหลักเป็นเลข 6 (เลข 3) กับจำนวนเต็มบวกถัดไป โดยอาศัยหลักการอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์เป็นเครื่องมือสำคัญในการพิสูจน์ ทำให้สามารถตอบข้อสงสัยทั้งสองข้อข้างต้นได้ ดังนี้

(1) สามารถเขียนรูปแบบทั่วไปที่แน่นอนของผลคูณของจำนวนที่ทุกหลักเป็นเลข 6 (เลข 3) กับจำนวนเต็มบวกถัดไป ได้ตามทฤษฎีบท 8 (ทฤษฎีบท 11) และสรุปเป็นสูตรสำหรับทุกจำนวนเต็มบวก n ได้ดังนี้

$$\underbrace{666\ldots6}_{\#(6)=n-1}6\times\underbrace{666\ldots6}_{\#(6)=n-1}7=\underbrace{444\ldots4}_{\#(4)=n}\underbrace{222\ldots2}_{\#(2)=n}$$

และ

$$\underbrace{333\ldots3}_{\#(3)=n-1}3\times\underbrace{333\ldots3}_{\#(3)=n-1}4=\underbrace{111\ldots1}_{\#(1)=n}\underbrace{222\ldots2}_{\#(2)=n}$$

นอกจากนี้ ยังสามารถจัดรูปผลคูณให้อยู่ในพจน์ของจำนวนที่ทุกหลักเป็นเลข 6 (เลข 3) ได้และสรุปเป็นสูตร ดังนี้

$$\left(\underbrace{666\ldots6}_{\#(6)=n}\right)^2+\underbrace{666\ldots6}_{\#(6)=n}=\underbrace{444\ldots4}_{\#(4)=n}\underbrace{222\ldots2}_{\#(2)=n}$$

และ

$$\left(\underbrace{333\ldots3}_{\#(3)=n}\right)^2+\underbrace{333\ldots3}_{\#(3)=n}=\underbrace{111\ldots1}_{\#(1)=n}\underbrace{222\ldots2}_{\#(2)=n}$$

(2) รูปแบบทั่วไปที่แน่นอนที่ได้ตามทฤษฎีบท 8 (ทฤษฎีบท 11) นั้นมีลักษณะเหมือนกับข้อสังเกตที่พบใน (II) (ใน (IX))

และจากทฤษฎีบท 8 พบว่าถ้า $\#(6)=n-1$ สำหรับจำนวนเต็มบวก n แล้วผลคูณของจำนวนที่ทุกหลักเป็นเลข 6 กับจำนวนเต็มบวกถัดไปจะขึ้นอยู่กับผลคูณ $6\times7=42$ โดยหลักครึ่งซ้ายของผลคูณจำนวน n หลักเป็นเลข 4 ทั้งหมด และหลักครึ่งขวาของผลคูณจำนวน n หลักเป็นเลข 2 ทั้งหมดเช่นกัน สำหรับผลคูณของจำนวนที่ทุกหลักเป็นเลข 3 กับจำนวนเต็มบวกถัดไปก็พิจารณาในทำนองเดียวกัน ฉะนั้นการคำนวณหาผลคูณของจำนวนที่ทุกหลักเป็นเลข 6 (เลข 3) กับจำนวนเต็มบวกถัดไปด้วยสูตรจากบทความนี้จึงเป็นเรื่องที่มีความสะดวกมากขึ้นนั่นเอง แต่ผลคูณลักษณะนี้ไม่จริง สำหรับจำนวนที่ทุกหลักเป็นเลข $4,5,7$ และ 8 กับจำนวนเต็มบวกถัดไป โดยพิจารณาได้จากตัวอย่างขัดแย้งต่อไปนี้

$$44\times45 = 1980 \neq 2200$$
$$55\times56 = 3080 \neq 3300$$
$$77\times78 = 6006 \neq 5566$$
$$88\times89 = 7832 \neq 7722$$

สำหรับผลคูณของจำนวนที่ทุกหลักเป็นเลข 9 กับจำนวนเต็มบวกถัดไป เห็นได้ชัดว่าเป็นจริง เนื่องจากผลคูณ $9\times10=90$ และจำนวนเต็มบวกถัดไปจากจำนวนที่ทุกหลักเป็นเลข 9 คือ $10,100,1000,\ldots$ ฉะนั้น

$\#(9)=0:$	9	$\times$	10	$=$	90	$:\#(9)=\#(0)=1$
$\#(9)=1:$	99	$\times$	100	$=$	9900	$:\#(9)=\#(0)=2$
$\#(9)=2:$	999	$\times$	1000	$=$	999000	$:\#(9)=\#(0)=3$
$\#(9)=3:$	9999	$\times$	10000	$=$	99990000	$:\#(9)=\#(0)=4$
$\#(9)=4:$	99999	$\times$	100000	$=$	9999900000	$:\#(9)=\#(0)=5$
$\#(9)=5:$	999999	$\times$	1000000	$=$	999999000000	$:\#(9)=\#(0)=6$
$\#(9)=6:$	9999999	$\times$	10000000	$=$	99999990000000	$:\#(9)=\#(0)=7$
$\#(9)=7:$	99999999	$\times$	100000000	$=$	9999999900000000	$:\#(9)=\#(0)=8$
$\#(9)=8:$	999999999	$\times$	1000000000	$=$	999999999000000000	$:\#(9)=\#(0)=9$
$\#(9)=9:$	9999999999	$\times$	10000000000	$=$	99999999990000000000	$:\#(9)=\#(0)=10$

สำหรับบทความเรื่องต่อไป สามารถนำไปสู่พัฒนาการศึกษาของบทความนี้โดยศึกษาและหารูปแบบทั่วไปที่แน่นอนของผลคูณของจำนวนที่ทุกหลักเป็นเลขสองหลักที่เลข 3 หารลงตัวกับจำนวนเต็มบวกถัดไปสองจำนวน อาทิ เลข 12 โดยอาศัยจำนวนเศษเหลือที่ได้กล่าวไว้ข้างต้นเป็นเครื่องมือในการพิสูจน์ และแปลงเลข 12 เป็นจำนวนเศษเหลือ ${}_12$ และจากการสังเกตผลคูณเช่นเดียวกับบทความนี้ ทำให้พบความสัมพันธ์ที่น่าสนใจ ดังนี้

$$\begin{array}{llllll}
\#({}_12)=0: & {}_12 & \times\ {}_14 & = & {}_168 & :\#({}_16)=\#(8)=1 \\
\#({}_12)=1: & {}_12{}_12 & \times\ {}_12{}_14 & = & {}_16{}_1688 & :\#({}_16)=\#(8)=2 \\
\#({}_12)=2: & {}_12{}_12{}_12 & \times\ {}_12{}_12{}_14 & = & {}_16{}_16{}_16888 & :\#({}_16)=\#(8)=3 \\
\#({}_12)=3: & {}_12{}_12{}_12{}_12 & \times\ {}_12{}_12{}_12{}_14 & = & {}_16{}_16{}_16{}_168888 & :\#({}_16)=\#(8)=4
\end{array}$$

ด้วยเหตุนี้ หากผู้อ่านเริ่มทำการศึกษาลักษณะทางพีชคณิตของจำนวนเต็มเช่นเดียวกับบทความนี้ก็คาดว่าน่าจะได้สูตรการคำนวณเช่นกันและสูตรที่ได้จากการศึกษาจะเป็นการช่วยเพิ่มความสะดวกในการคำนวณต่าง ๆ และนอกจากผลการศึกษาที่ได้แล้ว ผู้อ่านจะได้พบกับความสวยงามของคณิตศาสตร์อีกด้วย

กิตติกรรมประกาศ

ผู้เขียนขอขอบพระคุณผู้ประเมินบทความวิชาการทุกท่าน สำหรับข้อคิดเห็นและข้อเสนอแนะที่เป็นประโยชน์อย่างมากในการปรับปรุงบทความให้สำเร็จลุล่วงได้อย่างสมบูรณ์ โดยบทความนี้ได้รับการสนับสนุนจากกลุ่มวิจัย : Group for Young Algebraists in University of Phayao (GYA)

เอกสารอ้างอิง

1. Clark, W. E. 2002. *Elementary Number Theory. Department of Mathematics.* University of South Florida. USA.
2. ณัฐวุฒิ พลอาสา และ อัยเรศ เอี่ยมพันธ์. 2556. ความสวยงามวางนัยทั่วไป : การเริ่มต้นของกรุปของจำนวนเศษเหลือ. *วารสารนเรศวรพะเยา.* 6(1): อยู่ระหว่างการตีพิมพ์.
3. อัยเรศ เอี่ยมพันธ์. 2554. ความสวยงามวางนัยทั่วไป : การยกกำลังสองของจำนวนที่ทุกหลักเป็นเลข 1. *วารสารนเรศวรพะเยา.* 4(2): 29-35.
4. อัยเรศ เอี่ยมพันธ์. 2556. ความสวยงามวางนัยทั่วไป : จำนวนที่ทุกหลักเป็นเลข 1 และสมการเชิงเส้น. *วารสารวิทยาศาสตร์ มข.* 41(3): อยู่ระหว่างการตีพิมพ์.