ฟังก์ชันก่อกำเนิด
Generating Function

รองศาสตราจารย์วัชรี กาญจน์กีรติ

สาขาวิชาคณิตศาสตร์และสถิติ คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยราชภัฏเพชรบุรี

เมือง เพชรบุรี 76000

บทคัดย่อ

ฟังก์ชันก่อกำเนิดเป็นแนวทางหนึ่งที่ใช้แก้ปัญหาการนับ โดยเชื่อมโยงกับฟังก์ชันพีชคณิตและสัมประสิทธิ์ทวินามเป็นเครื่องมือเพื่อหาคำตอบที่เป็นไปได้ทั้งหมดของปัญหาเหล่านั้น

คำสำคัญ: ฟังก์ชันก่อกำเนิด การแก้ปัญหาการนับ

Abstract

The method of generating functions as it pertains to solving counting problems. Generating functions can be regarded as algebraic objects whose formal manipulation allows to count the number of possibilities by mean of algebra.

Keywords: Generating functions, Solving counting problems

บทนำ

ให้ $a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$ เป็นลำดับอนันต์ของจำนวนจริง แล้วฟังก์ชันก่อกำเนิดอยู่ในรูปของอนุกรมอนันต์

$$g(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots = \sum_{r=0}^{\infty} a_r x^r$$

เมื่อสัมประสิทธิ์ของ x^n ใน g(x) คือ a_n

ดังนั้น x^n เป็นนิพจน์ที่มี a_n เป็นสัมประสิทธ์ในลำดับจำกัด $a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ ที่สามารถเขียนลำดับนี้ให้เป็นลำดับอนันต์ $a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, 0, 0, 0, \ldots$

ดังเช่น ฟังก์ชันก่อกำเนิดของลำดับอนันต์ 1, 1, 1, 1, . . . , 1, . . . คือ

$$g(x) = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n + \ldots$$

แต่ g(x) เป็นอนุกรมเรขาคณิตที่อนันต์ มีอัตราส่วนร่วมเป็น x และผลบวกของอนุกรมเท่ากับ $\frac{1}{1-x}$ เมื่อ $|x| < 1$

นั่นคือ $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^n + \ldots$

จึงได้ $g(x) = \frac{1}{1-x}$ เป็นฟังก์ชันก่อกำเนิด และเมื่อนำฟังก์ชันก่อกำเนิด

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^n + \ldots$$

ไปหาอนุพันธ์ทั้งสองข้างได้

$$\frac{d}{dx}\frac{1}{(1-x)} = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \ldots$$

$$\frac{d}{dx}(1-x)^{-1} = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \ldots$$

$$(-1)\ (1 - x)^{-2}(-1) = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \ldots$$

$$\frac{1}{(1-x)^2} = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \ldots$$

นั่นคือ $\frac{1}{(1-x)^2}$ เป็นฟังก์ชันก่อกำเนิดของลำดับ 1 , 2 , 3 , 4 , . . .

และจากฟังก์ชันก่อกำเนิด

$$\frac{1}{1+x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^n + \ldots$$

เมื่อแทน x ด้วย –x

จึงได้ $$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \ldots$$

ซึ่ง

$$\frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x} = 2 + 0x + 2x^2 + 0x^3 + 2x^4 + \ldots$$

$$\frac{2}{1-x^2} = 2\,(1 + 0x + x^2 + 0x^3 + x^4 + \ldots)$$

$$\frac{1}{1-x^2} = 1 + 0x + x^2 + 0x^3 + x^4 + \ldots$$

นั่นคือ $\frac{1}{1+x}$ เป็นฟังก์ชันก่อกำเนิดของลำดับ 1, 0, 1, 0, 1, 0, . . .

จากทฤษฎีบททวินาม(Binomial Theorem) กล่าวว่า

$$(1 + x)^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1}x + \binom{n}{2}x^2 + \ldots + \binom{n}{n}x^n$$

$$= \binom{n}{0} + \binom{n}{1}x + \binom{n}{2}x^2 + \ldots + \binom{n}{n}x^n + 0 + 0 + 0 + \ldots$$

จึงได้ $g(x) = (1 + x)^n$

เป็นฟังก์ชันก่อกำเนิดของลำดับ

, , , . . . , , 0, 0, 0, . . .

เมื่อพิจารณาฟังก์ชันต่อไปนี้

$$(1 - x^2) = (1 - x)(1 + x)$$

$$(1 - x^3) = (1 - x)(1 + x + x^2)$$

$$(1 - x^4) = (1 - x)(1 + x + x^2 + x^3)$$

$$(1 - x^5) = (1 - x)(1 + x + x^2 + x^3 + x^4)$$

$$\vdots$$

เพราะฉะนั้น

$$(1 - x^{n+1}) = (1 - x)(1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^n)$$

พบว่า

$$\frac{1-x^{n+1}}{1-x} = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n$$

เป็นฟังก์ชันก่อกำเนิดของลำดับ

1, 1, 1, . . . , 1, 0, 0, 0, . . .

จากแนวคิดดังกล่าวฟังก์ชันก่อกำเนิดมีที่มาได้หลากหลาย ทำให้มีความจำเป็นที่จะต้องหาสัมประสิทธิ์ของ x ที่ยกกำลังในแต่ละพจน์ของฟังก์ชันดังกล่าว จึงเป็นที่มาของการหาสัมประสิทธิ์ของ x กำลังต่างๆ ดังนี้

การหาสัมประสิทธิ์ของ x^k

เพื่อให้การคำนวณหาสัมประสิทธิ์ของ x^k เป็นไปได้สะดวก จึงจำเป็นต้องศึกษาสมบัติ และเอกลักษณ์ต่อไปนี้

จาก $n, r \in I^+$ และ $0 < r \leq n$

ได้ว่า $\binom{n}{r} = \frac{n!}{(n-r)! \times r!} = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-r+1)}{r!}$

ถ้า $n < 0$

$$\binom{-n}{r} = \frac{-n(-n-1)(-n-2)\ldots(-n-r+1)}{r!}$$

$$= \frac{(-1)^r(n)(n+1)(n+2)\ldots(n+r-1)}{r!}$$

$$= \frac{(-1)^r(n+r-1)\ldots(n+2)(n+1)n(n-1)!}{(n-1)! \times r!}$$

$$= \frac{(-1)^r(n+r-1)!}{(n-1)! \times r!}$$

$$\binom{-n}{r} = (-1)^r \binom{n+r-1}{r}$$

จากสมบัติดังกล่าวใช้หาสัมประสิทธิ์ของ x^8 ในฟังก์ชันก่อกำเนิด $(1 + x + x^2 + x^3 + \ldots)10$ ได้ดังต่อไปนี้

เนื่องจาก $1 + x + x^2 + x^3 + \ldots = \frac{1}{1-x}$

จึงได้ $(1 + x + x^2 + x^3 + \ldots)10 = \left[\frac{1}{1-x}\right]^{10}$

$$= (1 - x)^{-10}$$

สัมประสิทธิ์ของ x^8 ใน $(1-x)^{-10}$ $= \binom{-10}{8}(-1)^8$

$= \binom{-10}{8}$

$= (-1)^8\binom{10+8-1}{8}$

$= \binom{17}{8}$

$= 121{,}550$

กำหนดฟังก์ชันก่อกำเนิด $(x^4 + 2x^5 + 3x^6 + \ldots)^5$
จงหาสัมประสิทธิ์ของ x^{27}

เนื่องจาก

$x^4 + 2x^5 + 3x^6 + \ldots = x^4(1 + 2x + 3x^2 + \ldots)$

$= x^4 \times \frac{1}{(1-x)^2}$

จึงได้

$(x^4 + 2x^5 + 3x^6 + \ldots)^5 = [x^4(\frac{1}{(1-x)^2})]^5$

$= x^{20}\left[\frac{1}{(1-x)^2}\right]^5$

$= x^{20}(1-x)^{-10}$

สัมประสิทธิ์ของ x^{27} = สัมประสิทธิ์ของ x^7 ใน $(1-x)^{-10}$

$= \binom{-10}{7}(-1)^7$

$= (-1)^7\binom{10+7-1}{7}(-1)^7$

$= \binom{16}{7}$

$= 11{,}440$

ในกรณีที่ฟังก์ชันก่อกำเนิดมีความซับซ้อนมากขึ้น เช่น $\frac{x^2-3x}{(1-x)^4}$ จะต้องมีการจัดรูปฟังก์ชันใหม่

เพื่อให้หาสัมประสิทธิ์ได้ง่ายขึ้น

เนื่องจาก $\frac{x^2-3x}{(1-x)^4} = x(x-3)(1-x)^{-4}$

ถ้าต้องการหาสัมประสิทธิ์ของ x^{12} ใน $\frac{x^2-3x}{(1-x)^4}$
จึงหาสัมประสิทธิ์ของ x^{12} ใน $(x-3)(1-x)^{-4}$ แทน

จาก $(x-3)(1-x)^{-4}$

$= (x-3)(a_0 + a_1(-x) + a_2(-x)^2 + \ldots)$

สัมประสิทธิ์ของ x^{11} คือ

$a_{10} + 3a_{11} = \binom{-4}{10} + 3\binom{-4}{11}$

$= (-1)^{10}\binom{4+10-1}{10} + 3(-1)^{11}\binom{4+11-1}{11}$

$= \binom{13}{10} - 3\binom{14}{11}$

$= 286 - 1092$

$= -806$

ประเด็นสำคัญอยู่ที่การนำไปประยุกต์ใช้กับปัญหาการนับ ด้วยนำปัญหามาสร้างเป็นฟังก์ชันก่อกำเนิด โดยที่สัมประสิทธิ์ของ x ที่ยกกำลังต่างๆ ที่เกิดจากการกระจาย คือคำตอบของปัญหาที่ต้องการ ดังนี้

ตัวอย่างปัญหาการนับ

1 จงสร้างฟังก์ชันก่อกำเนิดเพื่อหาจำนวนวิธีใส่ลูกบอล 16 ลูกที่เหมือนกันลงในกล่อง 4 ใบที่แตกต่างกันโดยกล่องใบแรกต้องมีลูกบอลไม่มากกว่าสามกล่องที่เหลือรวมกัน และกล่องใบสุดท้ายจะต้องมีลูกบอลไม่น้อยกว่าสามกล่องแรกรวมกัน

ให้ x_1 , x_2 , x_3 และ x_4 แทนจำนวนลูกบอลที่นำมาใส่กล่อง

ซึ่ง $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 16$

จากเงื่อนไข กล่องใบแรกต้องมีลูกบอลไม่มากกว่าสามกล่องที่เหลือรวมกัน

จึงได้ $x_1 \leq x_2 + x_3 + x_4$

แต่ $x_2 + x_3 + x_4 = 16 - x_1$

$x_1 \leq 16 - x_1$

$x_1 \leq 8$

และกล่องใบสุดท้ายจะต้องมีลูกบอลไม่น้อยกว่าสามกล่องแรกรวมกัน

จึงได้ $x_4 \geq x_1 + x_2 + x_3$

$x_1 + x_2 + x_3 = 16 - x_4$

$x_4 \geq 16 - x_4$

$x_4 \geq 8$

นั่นคือ ภายใต้เงื่อนไข $x_1 \leq 8$, $x_4 \geq 8$ ขณะที่ x_2 , x_3 ไม่มีข้อจำกัดใดๆ สร้างฟังก์ชันก่อกำเนิดได้ดังนี้

ให้เลขยกกำลังของ x แทนจำนวนลูกบอล

นิพจน์ที่แจกแจงการใส่ลูกบอลในกล่องใบที่ 1

คือ $1 + x + x^2 + \ldots + x^8$

นิพจน์ที่แจกแจงการใส่ลูกบอลในกล่องใบที่ 2

คือ $1 + x + x^2 + \ldots$

นิพจน์ที่แจกแจงการใส่ลูกบอลในกล่องใบที่ 3

คือ $1 + x + x^2 + \ldots$

นิพจน์ที่แจกแจงการใส่ลูกบอลในกล่องใบที่ 4

คือ $x^8 + x^9 + x10\ldots$

ฟังก์ชันก่อกำเนิดคือ

$$g(x) = (1+x+x^2+\ldots+x^8)(1+x+x^2+\ldots)2(x^8+x^9+ x^{10}\ldots)$$

$$= \frac{1-x^9}{1-x}\left(\frac{1}{1-x}\right)^2 . x^8 \left(\frac{1}{1-x}\right)$$

$$= x^8 (1-x^9) (1-x)^{-4}$$

เมื่อเพิ่มเงื่อนไขมากขึ้นแนวทางการสร้างฟังก์ชันยังเป็นหลักการเดิม เช่น

2 จะมีวิธีจัดดินสอเหมือนกัน 25 แท่งลงในกล่อง 7 กล่องได้กี่วิธี ถ้ากล่องใบแรกใส่ดินสอได้ไม่เกิน 10 แท่ง ส่วน 6 กล่องที่เหลือใส่ได้ไม่จำกัด และมีบางกล่องอาจจะไม่ได้ใส่ดินสอเลยก็ได้

นิพจน์ที่แจกแจงการจัดดินสอใส่กล่องใบแรก

คือ $(1 + x + x^2 + \ldots + x^{10})$

นิพจน์ที่แจกแจงการจัดดินสอใส่กล่อง 6 ใบหลัง

คือ $(1 + x + x^2 + \ldots)^6$

ฟังก์ชันก่อกำเนิดสำหรับการจัดดินสอใส่กล่อง 7 ใบ คือ

$$g(x) = (1+ x + x^2+ \ldots + x^{10}) (1 + x + x^2 + \ldots)^6$$

$$= \frac{\left(1-x^{11}\right)}{\left(1-x\right)} \cdot \left[\frac{1}{1-x}\right]^6$$

$$= (1 - x^{11}) (1 - x)^{-7}$$

ในที่นี้ต้องการสัมประสิทธิ์ของ

x^{25} ใน $(1 - x^{11}) (1 - x)^{-7}$

ให้ $(1 - x^{11}) (1 - x)^{-7}$

$$= (1 - x^{11}) (a_0 - a_1x + a_2x^2 - a_3x^3 + \ldots)$$

สัมประสิทธิ์ของ x^{25} คือ

$$- a_{25} - a_{14} = -\binom{-7}{25} - \binom{-7}{14}$$

$$= \binom{31}{25} - \binom{20}{14}$$

$$= 736,281 - 38,760$$

$$= 697,521$$

จำนวนวิธีจัดดินสอใส่กล่องเท่ากับ 697,521 วิธี

สรุป

ฟังก์ชันก่อกำเนิดช่วยแก้ปัญหาการนับที่เกิดขึ้นได้เสมอคือ นับได้ไม่ครบหรือนับขาดไปจากความเป็นจริง นับเกินอันเนื่องมาจากการนับที่ซ้ำซ้อน โดยเปลี่ยนปัญหาเหล่านั้นเป็นฟังก์ชันทางพีชคณิต และใช้สัมประสิทธิ์ทวินามหาคำตอบ

เอกสารอ้างอิง

1. Balakrishnan, V.K. 1995. *Theory and Problems of Combinatorics.* New York: McGraw–Hill .
2. Biggs, N.L. 2002. *Discrete Mathematics.* New York: Oxford University.
3. Brualdi, R.A. 1999. *Introductory Combinatorics.* New Jersey: Prentice – Hall.
4. D/angelo, J.P. , & West, D.B. 2000. *Mathematical Thinking Problem Solving and Proofs.* U.S.A.: Prentice – Hall.